

論 文

不確実性の下での良き意思決定 適切な医療とは？*

井伊 雅子・原 千秋**

＜要旨＞

本論文の目的は、臨床検査に基づく施術や政策の選択を不確実性下の意思決定問題として定式化し、ミクロ経済学における分析手法を援用することで、より適切な施術や政策の選択に資する点にある。特に乳がん検診と COVID-19（新型コロナウイルス）の PCR 検査を取り上げるが、両者には大きな違いがある。それは、COVID-19 の PCR 検査にはまだ十分なデータの蓄積がないので、感染（罹患）確率が不明な点である。そこで、本論文ではこの状況を、事前確率が一意に定められない環境での曖昧さ回避的主体の意思決定問題として分析する。既存の文献では、曖昧さ回避的な意思決定主体が検査結果などに基づいて確率評価をアップデートする方法が複数提唱されているが、本論文では、動学的一貫性と帰結主義という 2 つの条件を満足するアップデート方法を取り上げ、合理的な意思決定への道筋を明らかにする。特に、PCR 検査に関して妥当と思われる感度と特異度を仮定すると、動学的一貫性を課すことで、想定すべき偽陽性の（事前）確率の範囲の上限値が、そうでない場合の 6 倍超大きいことを示す。

JEL Classification Codes: D81, I12, I18

Keywords: 意思決定、偽陽性、曖昧さ

* 内閣府経済社会総合研究所により開催された 2019-2020 年度国際共同研究「2025 年に向けた財政・社会保障制度に関する研究」WG2（超高齢社会における制度と市場の関係性の在り方に関する研究）の中間報告会および最終報告会において、討論者の野村裕氏をはじめ、主査の松井彰彦氏、鎌田雄一郎氏から大変有益なコメントをいただきました。ここに記して感謝します。本稿の基礎となる研究は、科学研究費補助金・基盤研究(B)（課題番号 18H00845）、平成 31 年度京都大学経済研究所プロジェクト研究から助成を受けました。なお、本稿における誤りはすべて筆者らの責に帰するものです。

** 井伊 雅子：一橋大学国際・公共政策大学院教授。原 千秋：京都大学経済研究所教授。

Clinical Decision Making Under Uncertainty: What Is A Good Medical Practice?

By Masako II and Chiaki HARA

Abstract

The purpose of this paper is to formulate the choice of a treatment or policy based on medical tests as a decision making under uncertainty in order to suggest a better decision in such a problem. While we consider mammography (for breast cancer) and PCR tests (for COVID-19) in this paper, they are quite different in that there is not enough evidence so far that allows us to deduce a single reliable probability of infection of COVID-19 in the population. As such, we analyze the situation as the decision making by an ambiguity-averse agent who cannot count on a single probability distribution over the state space. While several rules have been proposed and characterized in the literature for an ambiguity-averse agent to update probabilistic assessments based on medical tests and other types of additional information, we take up, in this paper, a rule that satisfies dynamic consistency and consequentialism for the purpose of proposing a rational decision. We show, under some plausible values of sensitivity and specificity of the PCR test, that the dynamically consistent rule requires the agent to reassess the highest ex-ante probability (prior to the test) of infection that is deemed relevant at the level of six times higher than when a naive, dynamically consistent rule is used.

JEL Classification Codes: D81, I12, I18

Keywords: Decision making, false positive, ambiguity.

1. はじめに

増え続ける医療費や介護費のために予防の重要性が言われる。予防が重要であることは誰も反対しないが、予防することが医療費や介護費の削減に結びつくかは実はエビデンスは少ない。例えば、健康診断やがん検診により、病気を早期発見できると言われている。患者の発病を抑えたり、早期に治療することで、本人の所得や厚生を向上させるだけでなく、将来の治療費や社会保険料を抑え、財政健全化にも寄与すると期待される。そのため、がん検診の費用を補助する自治体や企業も少なくない。

しかし、検査には有形無形のコストが伴う。最近の COVID-19 における PCR 検査で一般的に知られるようになったが、どのような検査にも誤差がある。例えば、がん検診で「異常なし」と言われてもがんに罹患している場合（偽陰性）もあり、「異常あり」と出ても罹患していない（偽陽性）こともある。非進行性がんを発見して不要な手術や治療を受ける場合も少なくなく、身体的・経済的負担は甚大となる。このように検査には便益だけではなく、害も多い。その便益は不確実なので、検査を受けるか否か、また、受けるとしたらどの程度精密かを定めることは、不確実性下の意思決定問題である。

がんや生活習慣病といった、これまでに多くの検査の実績がある疾患には、膨大な検査、研究、臨床の蓄積があり、罹患率、生存確率、治癒率などは入手可能である。しかし、全く同一の健康状態を持つ者は二人としないので、そうした確率が直ちに有用であるわけではない。個々の被検者の症状や状況を考慮した上で、検査の受診や、その後の手術の必要性を検討する必要がある、これは条件付き確率を求めることに他ならない。医師はこの条件付き確率に基づいて治療法を提案・採用すべきであり、患者もこの条件付き確率に基づいて自分に最も合った治療法を選ぶべきである。

既存の経済理論は、条件付き確率を正しく導出できるような合理的な経済主体を分析の対象としてきた。しかし、条件付き確率の値を正しく評価するには、やや洗練された確率的思考を要し、多くの実験結果やエピソードから、実際にはしばしば誤って評価されることが知られている。検査結果に基づいて治療法を選択する場合は、陽性の検査結果を過大に評価して、不要な治療（手術を含む）を受けてしまうことが多々ある。

そこで、本研究では、意思決定理論で培われた曖昧さ回避的な効用関数や条件付き確率の評価を適用して、臨床検査を分析したい。特に、PCR 検査においては感染率に関する十分な情報や知見が未だ得られていないので、乳がん検診の場合のようなベイズ的枠組は分析に不向きである。そこで、曖昧さ回避的効用関数とそれに伴う条件付き確率の定義を用いて社会的厚生を最大化を目指す意思決定問題を提示し、その含意を明らかにすることを本稿の目的とする。

2. 臨床の例

2.1 臨床研究の蓄積がある乳がん検診の例

医師はどのように意思決定をしているのだろうか。まず医療関係の学会が作成するガイドライン、そして DynaMed のようなエビデンスを統合し、臨床現場における意思決定プロセスをサポートするツールを参考にすることが多い。一方日本では、経験や製薬会社情報に頼ることがいまだに多い（宮田（2009, 2010））。

図 1: 乳がん検診のガイドライン

<日本対がん協会>	<米国>	<NICE（英国）>
- 対象者：40歳以上 - 受診間隔：2年に1回 - 主な検診内容：問診、乳房X線検査（マンモグラフィ）	- リスク評価（Breast Cancer Risk Assessment Tool） * 以下はaverage riskの場合 40～49歳：推奨せず、共同意思決定 [USPSTF]、個別に評価して2年ごとを推奨 [ACP]、1年ごと [NCCN, ACS（45歳～）, ACOG, ACR/SBI]、推奨せず [CTFPHC] 50～74歳：2年ごと [USPSTF, ACP]、1年ごと [NCCN, ACS, ACOG, ACR/SBI]、2～3年ごと [CTFPHC] 75歳以上：推奨せず [USPSTF, ACR/SBI, CTFPHC, ACP]、1年ごと [ACS, ACOG]	30歳以上で説明できない乳房のしこり、または50歳以上で片側のみの乳頭症状（分泌、陥凹、気になる変化）→2次医療へ紹介（2週間以内） - 乳がんの皮膚変化、または30歳以上で説明できない腋窩のしこり→2次医療へ紹介（2週間以内）を考慮 30歳未満で説明できない乳房のしこり→2次医療へ紹介（non-urgent）

注）
 USPSTF: U.S. Preventive Services Task Force
 ACP: American College of Physicians
 NCCN: National Comprehensive Cancer Network
 ACS: American Cancer Society
 ACOG: American College of Obstetricians and Gynecologists
 ACR/SBI: American College of Radiology/Society of Breast Imaging
 CTFPHC: Canadian Task Force on Preventive Health Care
 NICE: National Institute for Health and Care Excellence

図1は日本・米国・英国の乳がん検診のガイドラインを示しているが、国によって多様であることがわかる。米国ではそれぞれの学会でガイドラインを作成しており、同じエビデンスを使って異なるガイドラインができる可能性がある。その団体のためのガイドラインということもありうる。つまり確率評価が確立していても、その評価の解釈には幅があり団体に都合の良い解釈がなされる場合があるのかもしれない。英国は国民全員をカバーする医療保障制度があり、がん検診に関しても国が統一したガイドラインを示している。日本では、日本対がん協会がガイドラインを出しているが、米国や英国と比べて最新のエビデンスに基づいたものを医師や住民向けにわかりやすく提示しているとは言いがたい。そのためか職場や自治体などが独自に様々ながん検診を推奨している。症状がない罹患率の低い住民が、自分の判断で検診を受けて、陽性結果が出たところで医療機関を受診し、医療機関で再度のマモグラフィーなどの検査などが行なうなど過剰医療が行われている可能性が高い（OECD（2019））。

図2では、年齢、人種など観察可能な特性に基づいた乳がん罹患率と乳がん検診（マモグラフィー検査）の感度、特異度に基づいて確率評価を行おうとしたものである。しかし、

年齢別の日本人女性の乳がん罹患率の入手は容易ではない。American Cancer Society のデータによると、10 万人の女性のうち、罹患者は 126 人（米国）、114 人（オーストラリア）、92 人（アジア・太平洋）であり、ここでは罹患率は 0.1%とした。マンモグラフィー検査の感度、特異度は年齢で異なると考えられるが、年齢ごとのデータはなく、DynaMed から感度 80%、特異度 90%を用いた。

特に何の症状もない女性が乳がん検診を受けて、検査結果が陽性だったとしよう。この女性が実際に乳がんにかかっている確率はどのくらいであろうか。驚くことにたった 0.79%である。乳がん検診陽性の女性が 1 万人いるとして、そのうち乳がんにかかっているのはたった 79 人ということになる。ここで、しこり、痛みなどの自覚症状がある女性が検査を受ける場合、事前確率を 50%とする。これは、身体所見、自覚症状などから医師が経験的に割り出した事前確率（リスク）である。その場合、実際に乳がんにかかっている確率は 90%近くになる。

我々は偽陽性反応（乳がんでないのに検査結果が陽性）の被検者の数を無視しがちである。この例では、99.9%の人はこの病気にかかっていないので、そのうちの 10%ですら、陽性を示す被検者の多数を占める。同じ検査（マンモグラフィー）で陽性であっても、本当に病気である確率は検査前の事前リスクに大きく左右される。図 3 では、確率 p の人が乳がんにかかっている時、陽性反応者が実際にこの病気にかかっている確率を示したものである。ここから明らかなのは、検査（マンモグラフィー）で陽性の場合、本当に病気である確率は検査前の事前確率に大きく左右されるのである。

図 2: 乳がん検診の確率評価

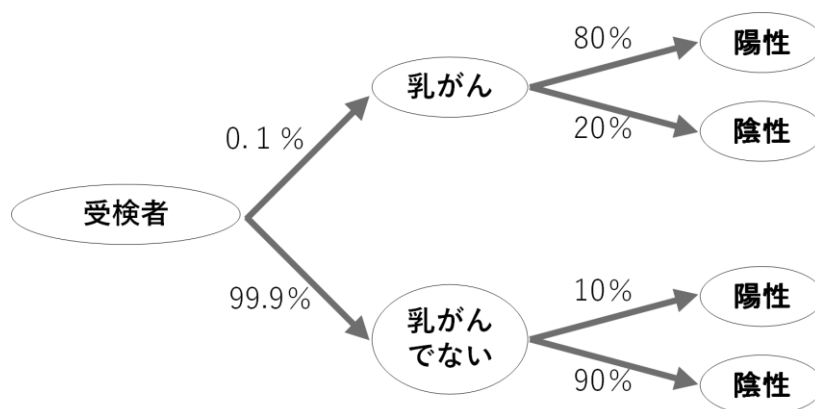


図 3: 事前確率と事後確率

P (事前確率)	0.1%	1%	10%	20%	50%
実際に病気にかかっている確率 (事後確率)	0.79%	7.5%	47.1%	66.7%	88.9%

2.2 PCR 検査の例

乳がんのように、臨床研究の蓄積がある疾患でも、人種、年齢ごとの罹患率、マモグラフィ検査の感度、特異度の入手は難しい。COVID-19 の感染率は日々変化しており正確なデータはわからない。PCR 検査の感度や特異度は、データの蓄積もあり信頼できる数値がわかってきた。もっとも感度や特異度が一意に定まるとしても、検査結果で条件付けした感染確率は、事前の感染率によって大きく異なる。COVID-19 は、感染していても症状がなく PCR 検査も陰性なのに、感染を広げる可能性もあり、陰性・偽陰性の区別は特に困難である。ここで、図 4 のように、感染率 1%、感度 70%、特異度 99%とする。この状況で、PCR 検査を行うと、PCR 検査陽性となった人が実際に感染している確率は 41%で、陽性となった人の約 5 人に 3 人は誤って陽性と判定され（偽陽性）、感染していないのに強制隔離されてしまう。一方で、感染者は確率 30%で陰性反応（偽陰性）を示すので、安心して外出してしまうことになる。

PCR 検査の精度はそのまま、感染率が 5%になると、PCR 検査で陽性を示した被検者が実際に感染している確率は 78.7%と高くなるが、依然陽性となった人の約 5 人に 1 人は誤って陽性と判定されている。また、安心して外出する人数も増えてしまう。

ここで、PCR 検査対象を濃厚接触者、例えば感染率を 50%とする。そうすると検査で陽性となった人で実際に感染している人の確率は 98.6%であり、PCR 検査はかなり正確になる。それでも感染者は確率 30%で検査結果が陰性となる。

ところで、検査対象者の人数を最適化することも重要な問題であるが、この論文の目的ではないので議論していない。例えば検査対象者の人数を絞ることで、検査されない人数が増える可能性があり、そのような人たちの平均的行動を変える可能性があるが、この点はこの論文では考慮していない。

この論文の後半で詳細に議論するように、受検者の範囲もはっきりしない現状（検査キットを自分で購入する人もいる）では、全人口の感染率に幅を持たせるというこの論文のアプローチは、特に有意義であると考えられる。

2.3 まとめ

一昔前は、検査が陽性なら病気あり、陰性なら病気なしと考えられていた。今の検査の考え方は、全て確率論である。検査は『検査前確率』から『検査後確率』を導き出す手段に過ぎない。症状や CT の画像などと同じく、診断のための一つのツールに過ぎない。

安心のために検査を受けるという人たちに対して『受けるな』とも言えないだろう。もし受ける場合は、検査にはそういう限界があることを知った上で受けることが必要である。

3. 感染確率が不明なとき

3.1 問題の所在

前節で見たように、陽性反応を呈した被検者を直ちに感染・罹患していると判断しがちだが、これは、感染率次第では実際に感染・罹患している患者が少ないことを見逃しているからである。この点を明らかにするために、感度 70%と特異度 99%という仮定は維持しつつ、感染率が変わるときに、陽性反応を示した被検者のうち、実際に感染・罹患している人の確率を求めてみよう。特に、PCR 検査の対象となる人々（濃厚接触者か、特定の職業に従事する者が、高齢者か、それとも全国民か）によって感染率は大きく異なるので、陽性反応を呈した被検者が実際に感染している確率を把握するのは重要である。

感染率を p で表すことにすると、陽性反応を示す被検者が実際に感染している確率は

$$\frac{0.7p}{0.7p + 0.01(1 - p)}$$

である。他方、陰性反応を示す被検者が実際には感染している確率は

$$\frac{0.3p}{0.3p + 0.99(1 - p)}$$

である。表 1 に p の値 ($100 \times p$ がパーセント) と、陽性反応および陰性反応を示す場合それぞれにおいて、被検者が実際に感染している者の確率を示した。

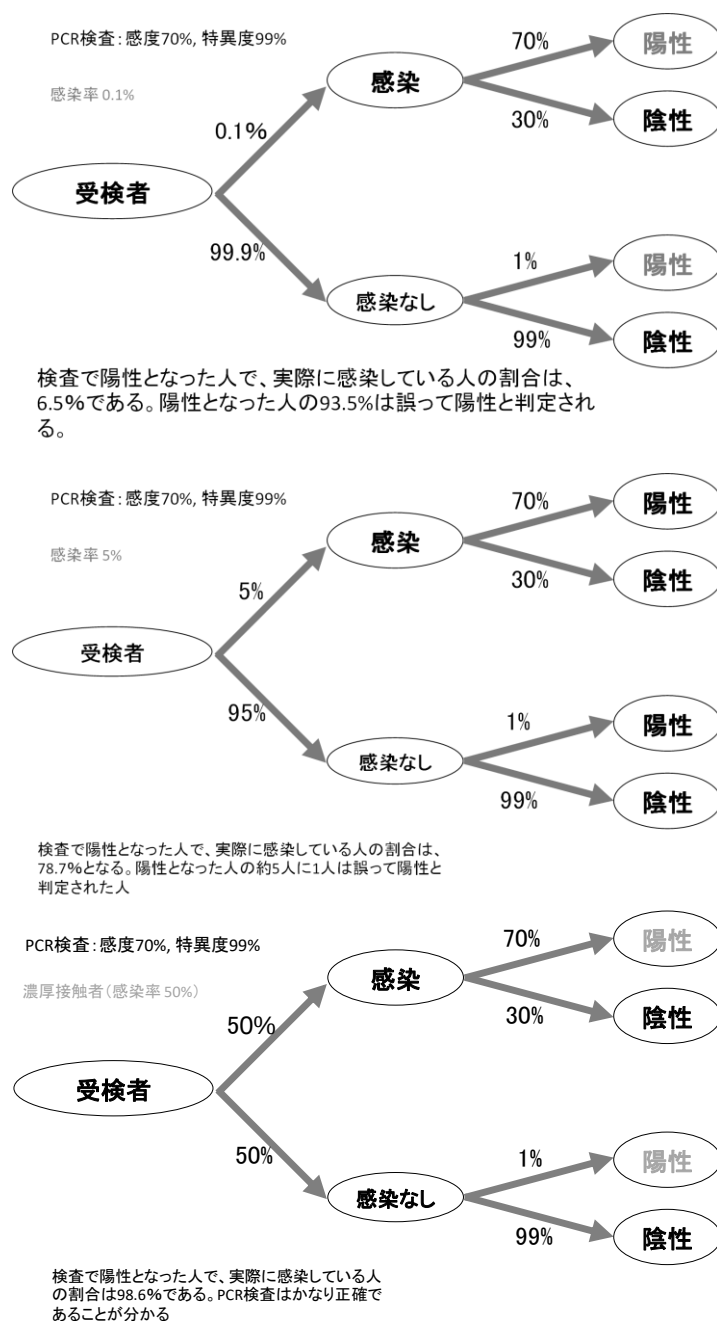
小峰 (2020) も指摘したことだが、感染率が低い時は、陽性反応を示しても、実際には感染していない確率は高い。例えば、陽性反応者が実際に感染している確率が 50%を上回るのは、被検者の中で実際に感染している確率が 1.5%を上回るときに限られるのである。対極に位置する例としては、感染者の確率が 77%を超える場合は、陰性反応を呈した場合でも、50%を上回る確率で実際には感染している点にも注意が必要である。

この点は、陽性反応者・および陰性反応者の取り扱いについて重要な示唆を与える。すなわち、例えば、感染率が 0.5%であった場合、陽性反応者が実際に感染している確率は 26%程度なので、残りの確率 74%ではそのような被検者を隔離する必要はない。隔離には、被検者の行動の自由を奪うことになる他、経済社会活動にも制限を加えることになる。本来不要な施策を強いる可能性があるなら、その可能性と実際に感染している者が他者と接触することでウイルスを拡散する社会的損失を天秤にかけた上で施策の是非を議論すべきであろう。他方、感染率が 20%であるとする、たとえ陰性反応を呈した場合でも、実際に感染している確率は 7%である。換言すれば、陰性反応だということで、今まで通り行動していると、社会的損失を比較すべきである。

陽性反応者は隔離し、陰性反応者は隔離しないという方針を採った場合、感染率が 0.1%なら、陽性反応者が実際に感染している確率は 6.5%程度なので、隔離が正当化されるか定かではない。他方、例えばもし全人口の半分以上が感染している場合ですら、陰性反応者でも 23.3%で感染しているので、隔離しないのが得策とも思えない。すなわち、感染率が 0%や

100%に近いときに PCR 検査を行うのは非効率的である。特に、検査対象を濃厚接触者や医療従事者などから一般市民に広げると、感染率は低くなるのだが、感染率が低いとき、PCR 検査を行うのが有用であるとは言い難い。

図 4: PCR 検査の偽陽性の確率



ベイズの公式は、PCR 検査をはじめとする各種検査の結果をどのように意思決定に活用すべきかを考察する際に、ひとつの重要な点を指し示す。それは、全人口（母集団）のな

かでの感染率や罹患率といった、ベイズの公式における事前確率を定めるのは容易ではないことである。まず、PCR 検査の対象を濃厚接触者から全住民・全国民に広げるべきという論調にみられるように、被検者の特性は一樣ではないので、その検査対象範囲を広げることで、感染確率が変わる（減る）ことが大いにありうる。また、実際に検査をするとき、個々の被検者の環境（濃厚接触者であるか、高齢者であるか、それとも単に出張のために検査を受けているな）に応じて、感染確率は大きく異なる。やや大袈裟な言い方をすれば、多くの場合、事前確率は、通常解釈されるような「条件なし確率 (unconditional probability)」ではなく、被検者がおかれた環境やその観察可能な特性（年齢や家族構成・交友関係）を考慮に入れて解釈されるべきである。

表 1: 事前確率と事後確率の関係

p	陽性反応者が実際に感染している確率	陰性反応者が実際に感染している確率
0.001	0.065481758652947	0.000303241653273
0.003	0.173985086992543	0.00091099571832
0.005	0.260223048327138	0.001520450053216
0.01	0.414201183431953	0.003051571559353
0.015	0.515970515970516	0.004593477262288
0.02	0.588235294117647	0.006146281499693
0.03	0.684039087947883	0.009285051067781
0.05	0.786516853932584	0.015698587127159
0.1	0.886075949367089	0.03257328990228
0.15	0.92511013215859	0.050761421319797
0.2	0.945945945945946	0.070422535211268
0.3	0.967741935483871	0.114942528735632
0.4	0.979020979020979	0.168067226890756
0.5	0.985915492957746	0.232558139534884
0.6	0.990566037735849	0.3125
0.7	0.993914807302231	0.414201183431953
0.77	0.995750969887308	0.503597122302158
0.8	0.99644128113879	0.547945205479452
0.9	0.998415213946117	0.731707317073171
0.95	0.999248685199098	0.852017937219731
1.0	1.0	1.0

3.2 曖昧さ回避的選好

前節では、PCR 検査などにおいては、事前の感染確率 p をどのような値に設定すれば良いかが不明なこと、また、陽性反応を示した被験者が実際に感染している（条件付き）確率は、事前の感染確率に大きく依存することを示した。検査結果に基づいて施術や政策を選択する際、信頼できる事前確率が存在しないなら、その事実を考慮して最適な施策を選

ぶのが適切である。例えば、事前の感染確率は 1%か 15%の間にあるとした場合、中間値である 8%を想定してベイズの公式から陽性反応者の感染などの確率を導出しても、到底適切な意志決定を行えるとは言えない。実際のところ確率分布は未知であり、意志決定主体にはこのような曖昧さを回避する傾向があるのだが、この方法は、これらふたつの事実を全く無視しているからである。以下では、しばしば観察される人々の行動様式は、事前確率 p をひとつ固定するよりも、いくつかの事前確率の可能性を考慮に入れると想定する方がよりよく説明できることを例示する。この例は Ellsberg (1961) のパラドックスとしてよく知られている。

2つの壺 A と B から取り出すボールの色に応じて賞金が決まるくじ引きを考えよう。いずれの壺にも赤いボールと白いボールが合計 100 個入っているとする。壺 A には赤いボールと白いボールが 50 個ずつ入っていることがわかっている、壺 B の赤いボールと白いボールの内訳は不明である。被験者には以下の 2 つの質問に答えてもらうこととする。

質問 1 以下の 2 つのくじ引きのどちらか一方をもらえたとしたら、どちらを選ぶか？

L_{AR} 壺 A から赤いボールを取り出せば、賞金 10 万円を得る。白いボールははずれ。

L_{BR} 壺 B から赤いボールを取り出せば、賞金 10 万円を得る。白いボールははずれ。

質問 2 以下の 2 つのくじ引きのどちらか一方をもらえたとしたら、どちらを選ぶか？

L_{AW} 壺 A から白いボールを取り出せば、賞金 10 万円を得る。赤いボールははずれ。

L_{BW} 壺 B から白いボールを取り出せば、賞金 10 万円を得る。赤いボールははずれ。

Ellsberg 自身をはじめ、多くの研究者がこの種の質問を被験者（ある特定の講義の履修者や、大学内で告知された募集に応募した学生など）に尋ねたところ、過半数はどちらの質問においても、壺 A から取り出したボールの色で賞金が決まるくじ引き (L_{AR} と L_{AW}) を選んだ。ところが、壺 B にある赤いボールと白いボールの内訳にただひとつの確率分布を想定する被験者は、決してこのような選択はしないことが次のように示される。仮に、そのような被験者が、壺 B から赤いボールを取り出す確率（つまり、壺 B で赤いボールが占める割合）は p_{BR} であり、白いボールを取り出す確率（壺 B で白いボールが占める割合）を p_{BW} であると想定するとしよう。質問 1 で L_{AR} を選ぶなら、 $p_{BR} < 1/2$ のはずであり、質問 2 で L_{AW} を選ぶなら、 $p_{BW} < 1/2$ のはずである。よって、 $p_{BR} + p_{BW} < 1$ が成立するが、B 中のボールはどれも赤か白なので、 $p_{BR} + p_{BW} = 1$ が成立すべきである。換言すれば、どちらに質問に対しても、壺 A から取り出したボールの色で賞金が決まるくじ引きを選ぶ被験者（多くの実験で過半数を占めた被験者）は、ひとつの確率分布を想定していないことをこの実験結果は示している。

では、どちらの質問に対しても、壺 A から取り出したボールの色で賞金が決まるくじ引きを選ぶ被験者の行動様式はどのように表現・定式化できるだろうか？ここでは Gilboa

and Schmeidler(1989)による定式化を、Ellsberg のパラドックスで解説しよう。被験者はボールの内訳に関する確率分布のいわば候補を複数持っており、そのそれぞれに関する賞金の期待値を参考にするものの、ボールの内訳に関する曖昧さを回避する傾向があるので、それら複数の期待値のうち最小のものを判断基準とすると仮定することである。例えば、ある被験者は、壺 B には赤いボールが 49、50、51 個のいずれかが入っていると想定するとする。これはすなわち壺 B から赤いボールを取り出す確率 p_{BR} は 0.49、0.50、0.51 のいずれかであると想定することに他ならない。また、これは壺 B から白いボールを取り出す確率 p_{BW} も 0.49、0.50、0.51 のいずれかであると想定することと同じである。このとき、くじ引き L_{BR} の賞金の期待値は 4 万 9 千円、5 万円、5 万 1 千円のいずれかである。この被験者は曖昧さを回避する傾向があるので、このうち最小値の 4 万 9 千円をくじ引き L_{BR} の評価額とする。他方、壺 A には同数 (50 個) の赤いボールと白いボールがあることがわかっているので、くじ引き L_{AR} の賞金の期待値は 5 万円である。よって、質問 1 に対しては、この被験者は L_{AR} を選ぶ。同様に、くじ引き L_{BW} の評価額も 4 万 9 千円であり、他方、くじ引き L_{AW} の賞金の期待値は 5 万円である。よって、質問 2 に対しては、この被験者は L_{AW} を選ぶ。このように、どちらの質問に対しても壺 A を使うくじ引きを選ぶという行動は、信頼できる確率分布を特定できない環境での曖昧さ回避的傾向の帰結として説明できる。また、Gilboa and Schmeidler(1989)によれば、いずれの質問でも壺 A に基づいたくじ引きを選ぶ被験者の選好は

$$U(L_{BR}) = \min_{p \in [0.49, 0.51]} pu(10) + (1-p)u(0),$$

$$U(L_{BW}) = \min_{p \in [0.49, 0.51]} (1-p)u(10) + pu(0)$$

という maximin 型期待効用関数 U を用いて表すことができる。

また、上述の被験者の行動様式は Schmeidler (1989) による Choquet 積分型期待効用関数によっても説明できる。この効用関数を説明するために、まず、容量 (capacity) という確率分布の拡張概念を定義しよう。壺 B から取り出したボールの色で賞金が決まるくじ引き L_{BR} および L_{BW} は、状態空間 (state space) $\{R, W\}$ 上で定義された確率変数と考えられるが、この状態空間上の容量とは、 $\{R, W\}$ のべき集合 $\{\emptyset, \{R\}, \{W\}, \{R, W\}\}$ 上で定義された実数関数 ν で、 $\nu(\emptyset) = 0$ 、 $0 \leq \nu(R) \leq 1$ 、 $0 \leq \nu(W) \leq 1$ 、 $\nu(\emptyset) = 0$ を満たすものである。すなわち、確率分布と同様に、空集合 $\emptyset$ と全体集合 $\{R, W\}$ には確率 0 と 1 を与えつつも、真部分集合 $\{R\}, \{W\}$ には単調性のみを要求するのである。特に $\nu(\{R\}) + \nu(\{W\}) = 1$ が成立することは要求しない。maximin 型期待効用関数の場合と同様に、ここでは $\nu(\{R\}) = \nu(\{W\}) = 0.49$ とおこう。くじ引き L_{BR} および L_{BW} は賞金 10 万円を与えるか否かの確率変数なので、それぞれ X および Y で表す。容量 ν に基づいた Choquet 積分として X と Y の期待効用水準を求めると、

$$U(L_{BR}) = E^\nu[u(X)] = \nu(\{R\})u(10) + (1 - \nu(\{W\}))u(0) = 0.49u(10) + 0.51u(0),$$

$$U(L_{BW}) = E^\nu[u(Y)] = \nu(\{W\})u(10) + (1 - \nu(\{R\}))u(0) = 0.49u(10) + 0.51u(0)$$

が得られる。壺 A から取り出したボールの色で賞金が決まるくじ引き L_{AR} および L_{AW} の期待効用水準は $0.5u(10) + 0.5u(0)$ なので、Choquet 積分による効用関数でも、 L_{AR} および L_{AW} が選ばれることがわかる。

3.3 曖昧さがもたらす確率と動学的一貫性

前節では曖昧さ回避的な行動の一例である Ellsberg のパラドックスを挙げたが、そこには、PCR 検査のような追加的情報やそれに基づく事後の感染確率の導出といった、今般の感染症危機での最適政策の模索にあたって考察されるべき要素が含まれていない。そこで本節では、感染確率が不明な場合（可能と思われる感染確率が複数存在する場合）に、陽性反応の（周辺）確率や、陽性反応後の条件付き感染確率の集合を求める。その後、もし意思決定主体がこれらの集合に基づく maximin 型期待効用関数を評価基準として採用すると、意思決定が動学的一貫性（dynamic consistency）を満たさない場合があることを示す。動学的一貫性は意思決定が合理的である（実際の選択行動が効用関数の最大化から導出される）ために不可欠な条件なので、陽性反応の確率や条件付き確率の集合を合理的意思決定の基準として採用すべきでないことをこの例は表す。

標準的な期待効用関数と比べると、maximin 型期待効用関数が動学的一貫性を満たさない理由を捉えやすい。標準的な期待効用関数を用いる場合、意思決定者は感染確率のような不確実性を表す（事前の）確率分布をひとつに絞って期待効用などの評価基準を算出する。追加的情報がもたらされた場合は、ベイズの公式から得られた事後確率に基づいて期待効用を算出し直すが、いわゆる逐次期待値の法則（law of iterated expectation）によって意思決定の動学的一貫性が保証される。動学的一貫性は期待効用関数を用いた意思決定の利点のひとつであるが、あいにく、maximin 型期待効用関数を用いた場合は動学的一貫性は保証されない。例 1 で見るように、意思決定者が想定する複数の確率分布のうち、事後の（条件付き）期待効用値を最小化する確率分布が事前の期待効用値を最小化する確率分布とは異なることがあるので、逐次期待値の法則を適用できないのである。この欠点ゆえ、意思決定者が曖昧さ回避的であると想定するのではなく、（主観的な確率分布に基づいても構わないが）標準的な期待効用関数を持つと想定する方が好ましいようにも思えるが、本分析では、曖昧さ回避的傾向を想定しつつ、どのような確率分布の集合が動学的一貫性を保証するかを探る。これは、Ellsberg のパラドックスが示すように、曖昧さ回避的行動は広く観察される傾向であり、政策決定に用いられる判断基準には、多くの意思決定者（国民）が持つ傾向を反映されるべきだからである。

以下では、まず、Savage (1954) の分析の枠組に従って、不確実性を描写する状態空間を定式化しよう。これは、あり得べき（起こる可能性があると思われる）状態の集まりである。本節では、ひとつの状態は、個々の被検者が実際に COVID-19 に感染している (I) か否 (健康) (H) かと、PCR 検査で陽性反応 (P) と陰性反応 (N) のどちらを示すかで決められるとする。よって、状態空間は $\{I, H\} \times \{P, N\}$ つまり $\{IP, IN, HP, HN\}$ である。また、

陽性反応と示したときには自主隔離を要請するなどの施策によってもたらされる帰結 (consequence) は、感染の有無および隔離される (Q) か自由行動が許される (F) かによって決められるので、帰結の集合は $\{I, H\} \times \{Q, F\}$ つまり $\{IQ, IF, HQ, HF\}$ である。

Savage の枠組では、状態空間から帰結の集合への写像は、行為 (act) と呼ばれる。これは、自主隔離の要請などによって各状態で達成される帰結を列挙したものである。表 2 には、PCR 検査の結果に応じて自主隔離を要請する場合と、仮に感染しているか否かが正確にわかり、感染が判明したら自主隔離を要請する場合の行為を記した。

表 2: 行為の例

状態	検査結果で決める場合	仮に感染の有無が正確にわかる場合
IP	IQ	IQ
IN	IF	IQ
HP	HQ	HF
HN	HF	HF

この表が示すように、偽陰性 IN および偽陽性 HP のときに、検査結果に基づいた帰結は感染の有無が完全にわかるときの帰結と異なる。

次に、Ellsberg の例の場合と同様に、状態空間上に、可能と考えられる確率分布が複数存在するとしよう。どのような確率分布が可能であるかと定義する方法には色々あるだろうが、3.1 節および 3.2 節と同様に、事前の感染率は区間 $[\underline{p}, \bar{p}]$ ($\underline{p} < \bar{p}$) に属していることしかわからないが、感度と特異度は、それぞれ一意に定まり、値を $q_{P|I}$ および $q_{N|H}$ で表すことにする。 $q_{N|I} = 1 - q_{P|I}$ および $q_{P|H} = 1 - q_{N|H}$ と書くことにする。 $q_{N|I}$ は感染者が陰性反応を示す (偽陰性) の確率、 $q_{P|H}$ は感染していない被検者が陽性反応を示す (偽陽性) の確率である。感染している時の方が陽性反応を示す確率が高いと仮定する：

仮定 1 $q_{P|I} > q_{P|H}$

これは有用な PCR 検査なら必ず満たす、弱い条件である。

仮に事前の感染率があるひとつの値 p であることがわかっているならば、条件付き確率に定義にしたがって、各状態の確率を以下の通りに定まる。状態 (IP, IN, HP, HN) の確率は、それぞれ、 $(pq_{P|I}, pq_{N|I}, (1-p)q_{P|H}, (1-p)q_{N|H})$ である。そこでまず、状態空間上の確率分布の集合 $\mathcal{P}$ を

$$\{(pq_{P|I}, pq_{N|I}, (1-p)q_{P|H}, (1-p)q_{N|H}) \mid p \in [\underline{p}, \bar{p}]\} \quad (1)$$

と定義する。この定義は自然ではあるが、後述するように、動学的の一貫性を持たない maximin 型期待効用関数を生む。これでは $\mathcal{P}$ を合理的な意思決定の際の評価の指針とすることはできない。以下に、 $\mathcal{P}$ に属する確率分布が各状態に付与しうる確率の範囲を記した。これらはいずれも条件付き確率の定義から直ちに従う。

命題 1 1. $\{p_{IP} \mid p \in \mathcal{P}\} = [\underline{p}q_{P|I}, \bar{p}q_{P|I}]$.

2. $\{p_{IN} \mid p \in \mathcal{P}\} = [\underline{p}q_{N|I}, \bar{p}q_{N|I}]$.

3. $\{p_{HP} \mid p \in \mathcal{P}\} = [(1 - \bar{p})q_{P|H}, (1 - \underline{p})q_{P|H}]$.

4. $\{p_{HN} \mid p \in \mathcal{P}\} = [(1 - \bar{p})q_{N|H}, (1 - \underline{p})q_{N|H}]$.

続いて、 $\mathcal{P}$ に属する任意の確率（結合）分布について、周辺分布と条件付き分布を求めよう。まず、事前の感染確率を p とした場合、周辺分布の陽性・陰性反応の確率、すなわち実際に感染しているか否かにかかわらず陽性もしくは陰性反応を示す確率を $q_P(p)$, $q_N(p)$ と書くとする、

$$q_P(p) = pq_{P|I} + (1 - p)q_{P|H},$$

$$q_N(p) = pq_{N|I} + (1 - p)q_{N|H}$$

が成立する。また、

$$\underline{q}_P = \min_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} q_P(p), \quad (2)$$

$$\bar{q}_P = \max_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} q_P(p), \quad (3)$$

$$\underline{q}_N = \min_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} q_N(p), \quad (4)$$

$$\bar{q}_N = \max_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} q_N(p) \quad (5)$$

と表す。任意の p について $q_P(p) + q_N(p) = 1$ が成立するので、 $q_P(p)$ を最小化することと $q_N(p)$ を最大化することは同じである。したがって、 $\underline{q}_P + \bar{q}_N = 1$ が成立する。同様に、 $\bar{q}_P + \underline{q}_N = 1$ も成立する。

次に、事前の感染確率が p であるとしたときに、陽性反応もしくは陰性反応を示したときの（条件付き）感染確率と非感染確率をそれぞれ $q_{I|P}(p)$, $q_{H|P}(p)$, $q_{I|N}(p)$, $q_{H|N}(p)$ と書く、

$$q_{I|P}(p) = \frac{pq_{P|I}}{pq_{P|I} + (1 - p)q_{P|H}},$$

$$q_{H|P}(p) = \frac{(1 - p)q_{P|H}}{pq_{P|I} + (1 - p)q_{P|H}},$$

$$q_{I|N}(p) = \frac{pq_{N|I}}{pq_{N|I} + (1 - p)q_{N|H}},$$

$$q_{H|N}(p) = \frac{(1 - p)q_{N|H}}{pq_{N|I} + (1 - p)q_{N|H}}$$

が成立する。また、

$$\underline{q}_{I|P} = \min_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} q_{I|P}(p),$$

$$\bar{q}_{I|P} = \max_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} q_{I|P}(p),$$

$$\underline{q}_{I|N} = \min_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} q_{I|N}(p),$$

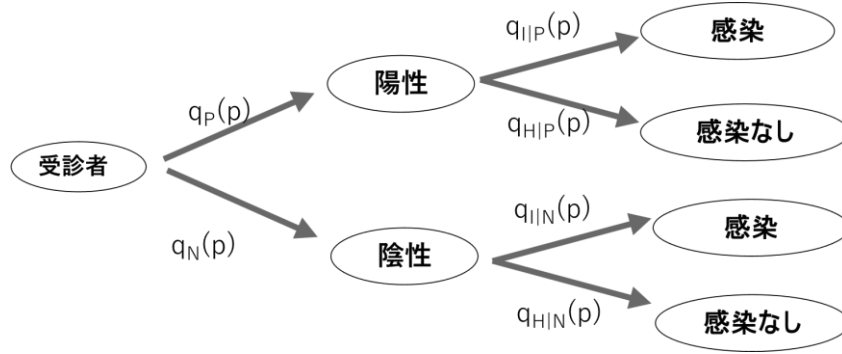
$$\bar{q}_{I|N} = \max_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} q_{I|N}(p)$$

と表すとし、 $\bar{q}_{H|P}$ 、 $\underline{q}_{H|P}$ 、 $\bar{q}_{H|N}$ 、 $\underline{q}_{H|N}$ も同様に定義する。任意の p について $q_{I|P}(p) + q_{H|P}(p) = 1$ および $q_{I|N}(p) + q_{H|N}(p) = 1$ が成立するので、 $q_{I|P}(p)$ または $q_{I|N}(p)$ を最大化することは、 $q_{H|P}(p)$ または $q_{H|N}(p)$ を最小化することと同じである。これらの理由により

$$\begin{aligned} \underline{q}_{I|P} + \bar{q}_{H|P} &= 1, \\ \bar{q}_{I|P} + \underline{q}_{H|P} &= 1, \\ \underline{q}_{I|N} + \bar{q}_{H|N} &= 1, \\ \bar{q}_{I|N} + \underline{q}_{H|N} &= 1 \end{aligned}$$

が成立する。以下の補題は、これらの最大値や最小値がどの $p \in [p, \bar{p}]$ で達成されるかを明らかにする。

図 5: PCR 検査の周辺確率や条件付き確率



補題 1 仮定 1 の下で、

$$\underline{q}_P = q_P(\underline{p}), \quad (6)$$

$$\bar{q}_P = q_P(\bar{p}), \quad (7)$$

$$\underline{q}_N = q_N(\bar{p}), \quad (8)$$

$$\bar{q}_N = q_N(\underline{p}), \quad (9)$$

$$\underline{q}_{I|P} = q_{I|P}(\underline{p}), \quad (10)$$

$$\bar{q}_{I|P} = q_{I|P}(\bar{p}), \quad (11)$$

$$\underline{q}_{H|P} = q_{H|P}(\bar{p}), \quad (12)$$

$$\bar{q}_{H|P} = q_{H|P}(\underline{p}), \quad (13)$$

$$\underline{q}_{I|N} = q_{I|N}(\underline{p}), \quad (14)$$

$$\bar{q}_{I|N} = q_{I|N}(\bar{p}), \quad (15)$$

$$\underline{q}_{H|N} = q_{H|N}(\bar{p}), \quad (16)$$

$$\bar{q}_{H|N} = q_{H|N}(\underline{p}). \quad (17)$$

これらの周辺確率や条件付き確率を図 5 に記した。

以上の結果を用いて、動学的一貫性を欠く選択の例を以下のように構成することができる。簡単化のため、この例では、 $\{IQ, IF, HQ, HF\}$ と定義した帰結の集合を、帰結が実現する効用水準の集合 $\mathbf{R}$ に置き換えた。したがって、行為は、状態空間 $\{IP, IN, HP, HN\}$ 上で定義された実数値関数である。

例 1 u_{HP} は $u_{HP} > q_{NI}/q_{PIH}$ を満たす実数とする。 $q_{IN}(p)$ は p の増加関数なので、 $q_{IN}(p) < u_N < q_{IN}(\bar{p})$ を満たす実数 u_N が存在する。そこで、行為 f および g を以下のように定義する。

表 3: 動学的一貫性が欠如する行為の例 行為

状態	行為	f	g
IP		0	0
IN		1	u_N
HP		u_{HP}	u_{HP}
HN		0	u_N

このとき、状態空間上の確率分布の集合 $\mathcal{D}$ に基づく maximin 型期待効用関数 U を持つ意思決定主体は、事前（検査結果が明らかになる前）には、行為 f を好むのに対し、検査結果が陰性反応 $\{IN, HN\}$ を示した後は、行為 g を好むことが本稿末の付論で証明される。 $f(IP) = 0 = g(IP)$ かつ $f(HP) = u_{HP} = g(HP)$ が成立するので、検査結果が陽性反応だった後 $\{IP, HP\}$ は、ふたつの行為は同一である。したがって、陰性反応後の選好の逆転は、動学的一貫性の欠如の証左である。

この例において選好の逆転が起こる理由は以下のように説明できる。まず、検査前には、状態 HP が起こり得ると考えられる。この状態の確率は $(1-p)q_{PIH}$ なので、 p の減少関数である。ふたつの行為 f と g のどちらをとっても、この状態で実現する効用水準は u_{HP} であるが、これは高く設定されているので、どちらの行為の場合でも、事前の maximin 型期待効用水準を達成する p は最大値 $\bar{p}$ である。検査結果が陽性であれば、行為 f と g は（実際に感染しているか否かにかかわらず）同じ効用水準をもたらすが、陰性であれば、 g がもたらす効用水準は必ず u_N であるのに対し、 f は実際には感染しているときに 1 をもたらすので、 u_N の値の選び方により、確率 $\bar{p}$ の下での期待効用水準は f の方が大きい。ところが、実際に検査結果が陰性であると、状態 HP はもはや起こり得ない。行為 f と g のいずれの場合でも、状態 HN で実現する効用水準が状態 IN で実現する効用水準を上回ることはないので、maximin 型期待効用水準を達成する p は最小値 $\underline{p}$ であるが、 u_N の値の選び方により、確率 $\underline{p}$ の下での（陰性反応で条件付けた）期待効用水準は g の方が大きい。すなわち、状態 HP が起こる可能性があるか否かで、maximin 型期待効用水準を達成する p の値が $\bar{p}$

から $\underline{p}$ に変わるので、選好が逆転する。

表 4: 動学的一貫性を満たす行為の例 行為

状態	行為	f	g
IP		u_C	u_C
IN		u_{IN}	u_C
HP		u_C	u_C
HN		u_{HN}	u_C

もちろん、すべての行為の組 (f, g) について、事前と事後の間で選好の逆転が起こるわけではない。表 4 は、このような選好の逆転が起こらない行為の組 (f, g) の例を与える。この例では、行為 g は効用水準 u_C を確実に達成する。行為 f は陽性反応後は行為 g と同じ効用水準 u_C を達成するが、表 3 と同様に、陰性反応後に行為 f がもたらす効用水準にはふたつの可能性 u_{IN} および u_{HN} がある。このとき、検査前に f と g が同程度に好ましい、すなわち $U(f) = U(g)$ が成立することと、検査後（特に陰性反応後）でも f と g が同程度に好ましい、すなわち $U(f) = U(g)$ が成立することが同値である。このことは、検査前の $U(f)$ を達成する確率分布（期待効用水準を最小化する $\mathcal{P}$ の要素）と陰性反応後の $U(f)$ を達成する確率分布が同じであることから従う。実際、 $U(f) = U(g)$ が検査前で成立し、なおかつ $(p_{IP}^*, p_{IN}^*, p_{HP}^*, p_{HN}^*)$ が $U(f)$ を達成する確率分布（のひとつ）であることは、 $\mathcal{P}$ に属する任意の確率分布 $(p_{IP}, p_{IN}, p_{HP}, p_{HN})$ について、

$$u_C = p_{IP}^* u_C + p_{IN}^* u_{IN} + p_{HP}^* u_C + p_{HN}^* u_{HN}$$

$$u_C \leq p_{IP} u_C + p_{IN} u_{IN} + p_{HP} u_C + p_{HN} u_{HN}$$

が成立することと同値である。第 1 式の両辺から $p_{IP}^* u_C + p_{HP}^* u_C$ を引き、残りを $p_{IN}^* + p_{HN}^*$ で割れば、この等式が

$$u_C = \frac{p_{IN}^*}{p_{IN}^* + p_{HN}^*} u_{IN} + \frac{p_{HN}^*}{p_{IN}^* + p_{HN}^*} u_{HN}$$

と同値であることがわかる。第 1 式の両辺から $p_{IP} u_C + p_{HP} u_C$ を引き、残りを $p_{IN} + p_{HN}$ で割れば、この不等式が

$$u_C \leq \frac{p_{IN}}{p_{IN} + p_{HN}} u_{IN} + \frac{p_{HN}}{p_{IN} + p_{HN}} u_{HN}$$

と同値であることがある。この等式および不等式は、陰性反応後に $U(f) = U(g)$ が成立することし、なおかつ $(p_{IP}^*, p_{IN}^*, p_{HP}^*, p_{HN}^*)$ （詳しくは、条件付き確率 $(p_{IN}^*/(p_{IN}^* + p_{HN}^*), p_{HN}^*/(p_{IN}^* + p_{HN}^*))$ ）が $U(f)$ を達成する確率分布（のひとつ）であることと同値である。これにより選好の逆転が起こらないことがわかった。

この例が示すように、先に定義した確率分布の集合 $\mathcal{P}$ においては、比較されるふたつの行為 f と g の一方（ここでは g ）が確実な効用水準（ここでは u_C ）をもたらす、なおかつ

考察の対象となる事象（ここでは陰性反応）が起こらなかったとき（ここでは陽性反応）に他方の行為（ここでは f ）も同じ効用水準を確実にもたらす場合には動学的一貫性が保証される。したがってこの性質は、上述のより広いクラスの行為に適用される動学的一貫性よりも緩い条件である。この性質は、Pires (2002) によって導入され、事後の確率分布の集合が $\mathcal{D}$ の要素のそれぞれにベイズ公式を適用することで得られる場合に、任意の maximin 型期待効用関数によって満たされることが証明された。Eichberger, Grant, and Kelsey (2007) や Horie (2013) はこの性質を conditional certainty equivalent consistency (条件付き確実性等価一貫性) と呼び、Choquet 積分型期待効用関数の場合にもこの性質が保証されることを示した。

3.4 長方形的な確率分布の集合の構成

前節では動学的一貫性が満たされない選択の例を見たが、本節では、まず、感染確率の曖昧さに基づいて長方形的 (rectangular) な確率分布の集合を構成する方法とその含意を紹介する。長方形的な確率分布の集合を構成することは、意思決定主体の曖昧さ回避的な態度を尊重しつつも、合理的な意思決定を行うための指針を与えることになる。

以下では、Epstein and Schneider (2003) の方法にしたがって、(1) で定義した確率分布の集合 $\mathcal{D}$ を長方形的集合に拡張する。この拡張が必要なのは、 $\mathcal{D}$ に基づいて逐次的に意思決定を進めていくと、動学的一貫性と帰結主義の両方を同時に満足することができないからである。これは彼らの定理 3.2 の主張に他ならない。すなわち、初期時点の確率分布の集合（これが大きいほど曖昧さ回避の度合いが高いということ）の要素のそれぞれにベイズの公式に適用して将来時点の maximin 型期待効用関数を導出する場合、起こりえないことが既にわかっている状態での行動に依存せず（帰結主義）、行為間の好ましさの順序（ランキング）がそれを決めるタイミングに依存しない（動学的一貫性）のは、初期時点での曖昧さ回避度を表す集合が長方形的である場合に限られるのである。今般の PCR 検査にまつわる施策の評価方法には色々考えられるが、これまでの議論の経緯に左右されたり、逆に、すでになされた意思決定と明らかに矛盾することがあってはならない。そのようなことがないことの必要条件が帰結主義と動学的一貫性である。

検査結果の（周辺）確率分布の集合および検査結果に基づいた条件付き感染確率分布の集合は、それぞれ、

$$\left\{ (q_P, 1 - q_P) \mid q_P \in [\underline{q}_P, \bar{q}_P] \right\}, \quad (18)$$

$$\left\{ (q_{I|P}, 1 - q_{I|P}) \mid q_{I|P} \in [\underline{q}_{I|P}, \bar{q}_{I|P}] \right\}, \quad (19)$$

$$\left\{ (q_{I|N}, 1 - q_{I|N}) \mid q_{I|N} \in [\underline{q}_{I|N}, \bar{q}_{I|N}] \right\} \quad (20)$$

である。Epstein and Schneider (2002) の定義によれば、これを周辺確率および条件付き確率とする長方形的な確率分布の集合は以下のように表される状態空間 $\{IP, IN, HP, HN\}$ 上の確率 $(p_{IP}, p_{IN}, p_{HP}, p_{HN})$ の集合である：ある $q_P \in [\underline{q}_P, \bar{q}_P]$ 、 $q_{I|P} \in [\underline{q}_{I|P}, \bar{q}_{I|P}]$ 、 $q_{I|N} \in$

$[q_{I|N}, \bar{q}_{I|N}]$ が存在して、

$$p_{IP} = q_P q_{I|P}, \quad (21)$$

$$p_{IN} = (1 - q_P) q_{I|N}, \quad (22)$$

$$p_{HP} = q_P (1 - q_{I|P}), \quad (23)$$

$$p_{HN} = (1 - q_P) (1 - q_{I|N}) \quad (24)$$

が成立する。この集合は、 $\mathcal{P}$ を含む長方形的な確率分布の集合（帰結主義と動学的の一貫性の両方を満たす maximin 型期待効用関数を生成する集合）のうち、最も小さなものである。

$(p_{IP}, p_{IN}, p_{HP}, p_{HN})$ に関するこの条件は、線形不等式を用いて、以下の（同値な）条件に書き換えることができる：

$$\underline{q}_{I|P} (p_{IP} + p_{HP}) \leq p_{IP} \leq \bar{q}_{I|P} (p_{IP} + p_{HP}),$$

$$\underline{q}_{I|N} (p_{IN} + p_{HN}) \leq p_{IN} \leq \bar{q}_{I|N} (p_{IN} + p_{HN}),$$

$$\underline{q}_P \leq p_{IP} + p_{HP} \leq \bar{q}_P.$$

このことから、長方形的な確率分布の集合は凸多面体であることがわかる。以下ではこの集合を $\mathcal{P}^{\text{rect}}$ で表す。各状態に付与される確率の範囲は、以下の命題で与えられる。

命題 2 仮定 1 の下で、

$$1. \{p_{IP} \mid p \in \mathcal{P}^{\text{rect}}\} = [\underline{p} q_{P|I}, \bar{p} q_{P|I}].$$

$$2. \{p_{IN} \mid p \in \mathcal{P}^{\text{rect}}\} = \left[\frac{\underline{q}_N}{\bar{q}_N} \underline{p} q_{N|I}, \frac{\bar{q}_N}{\underline{q}_N} \bar{p} q_{N|I} \right].$$

$$3. \{p_{HP} \mid p \in \mathcal{P}^{\text{rect}}\} = \left[\frac{\underline{q}_P}{\bar{q}_P} (1 - \bar{p}) q_{P|H}, \frac{\bar{q}_P}{\underline{q}_P} (1 - \underline{p}) q_{P|H} \right].$$

$$4. \{p_{HN} \mid p \in \mathcal{P}^{\text{rect}}\} = [(1 - \bar{p}) q_{N|H}, (1 - \underline{p}) q_{N|H}].$$

長方形的な確率分布の集合 $\mathcal{P}^{\text{rect}}$ は、元の確率の集合 $\mathcal{P}$ より厳密に大きいのだが、命題 1 と命題 2 を比べると、両者の違いは偽陰性・偽陽性の事前確率にあることがわかる。つまり、IP および HN という、PCR 検査の結果が正しい場合の状態に付与する確率の範囲は変わらないのだが、偽陰性・偽陽性という、社会的費用が大きい状態に付与する確率の範囲が大きくなるのである。その理由は付論にある証明からも窺い知ることができる。いずれの状態でも、 $\mathcal{P}^{\text{rect}}$ に属する確率分布がその状態に与える確率の最大値もしくは最小値は、まず、 $p \in [\underline{p}, \bar{p}]$ を選ぶことで陽性反応または陰性反応の事前確率（ p 、 $q_{P|I}$ 、 $q_{N|H}$ にベイズの公式を適用することで得られる確率）を最大化もしくは最小化し、次に、やはり $p \in [\underline{p}, \bar{p}]$ を選ぶことで検査結果で条件付けた感染確率や非感染確率を最大化もしくは最小化し、最後にこのふたつの最大値もしくは最小値の積をとることで求められる。状態 IP および HN ではこれらふたつの p が共通（いずれも $\bar{p}$ もしくは $\underline{p}$ ）であるが、偽陰性の状態 IN と偽陽性の状態 HP ではこれらふたつの p が相異なる（一方が $\bar{p}$ で他方が $\underline{p}$ ）。これは、Epstein and

Schneider (2003) が長方形的な確率分布の集合を定義した際に強調した点である。

長方形的な確率分布の集合をとることで、偽陰性・偽陽性という、社会的費用が大きい状態に付与する確率の範囲が広がることは注目に値する。これは、想定すべき「最悪のシナリオ」を一段と悪く設定しなければならず、それゆえ曖昧さを回避する傾向が強くなることを意味する。動学的一貫性と帰結主義を保証する確率分布の集合は長方形的な集合に限られることは既に触れた。上記の結果は、意思決定主体の判断基準（効用関数または選好関係）にこれらの性質を要請すると、PCR 検査の結果が誤りである状態に付与する確率が比較的高いシナリオも考慮すべきであることを意味する。

3.1 節で用いた数値例を使って、 $\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}^{\text{rect}}$ が与える検査前（事前）確率がどの程度異なるかを求めよう。

$$\underline{p} = 0.01 \text{ (想定する感染率の最小値)}$$

$$\bar{p} = 0.15 \text{ (想定する感染率の最大値)}$$

$$q_{\text{PI}} = 0.7 \text{ (感度)}$$

$$q_{\text{NIH}} = 0.99 \text{ (特異度)}$$

とおくと、命題 1 で得られた区間は、

$$\{p_{\text{IP}} | p \in \mathcal{P}\} = [0.007, 0.105],$$

$$\{p_{\text{IN}} | p \in \mathcal{P}\} = [0.003, 0.045],$$

$$\{p_{\text{HP}} | p \in \mathcal{P}\} = [0.0085, 0.0099],$$

$$\{p_{\text{HN}} | p \in \mathcal{P}\} = [0.8415, 0.9801].$$

である。他方、命題 2 で得られた区間のうち、 $\{p_{\text{IP}} | p \in \mathcal{P}^{\text{rect}}\}$ と $\{p_{\text{HN}} | p \in \mathcal{P}^{\text{rect}}\}$ は $\{p_{\text{IP}} | p \in \mathcal{P}\}$ と $\{p_{\text{HN}} | p \in \mathcal{P}\}$ に一致するが、 $\{p_{\text{IN}} | p \in \mathcal{P}^{\text{rect}}\}$ と $\{p_{\text{HP}} | p \in \mathcal{P}^{\text{rect}}\}$ については、補題 1 により、

$$\underline{q}_{\text{N}} = 0.8865,$$

$$\bar{q}_{\text{N}} = 0.9831,$$

$$\underline{q}_{\text{P}} = 0.0169,$$

$$\bar{q}_{\text{P}} = 0.1135$$

なので、

$$\frac{\underline{q}_{\text{N}}}{\bar{q}_{\text{N}}} = \frac{0.8865}{0.9831} \approx 0.9017,$$

$$\frac{\bar{q}_{\text{N}}}{\underline{q}_{\text{N}}} = \frac{0.9831}{0.8865} \approx 1.109,$$

$$\frac{\underline{q}_{\text{P}}}{\bar{q}_{\text{P}}} = \frac{0.0169}{0.1135} \approx 0.1489,$$

$$\frac{\bar{q}_{\text{P}}}{\underline{q}_{\text{P}}} = \frac{0.1135}{0.0169} \approx 6.716$$

が成立する。よって、

$$\{p_{IN} | p \in \mathcal{D}^{\text{rect}}\} \approx [0.0027, 0.0499],$$

$$\{p_{HP} | p \in \mathcal{D}^{\text{rect}}\} \approx [0.0013, 0.0665],$$

が得られる。偽陽性の事前確率 p_{HP} の上限が 1 %弱 (0.0099) から 6.6% (0.0665) 強に跳ね上がり、下限は約 0.8% (0.0085) から 0.1%強 (0.0013) に下がることが注目に値する。

前節の例 1 では、長方形的ではない確率分布の集合 $\mathcal{D}$ が定める maximin 型期待効用関数について選好の逆転が起こるふたつの行為 f と g を挙げた。本節では $\mathcal{D}$ を長方形的な集合 $\mathcal{D}^{\text{rect}}$ に拡張したが、Epstein and Schneider (2003) の定理 3.2 によれば、 $\mathcal{D}^{\text{rect}}$ が定める maximin 型期待効用関数については、 f と g の間でも選好の逆転は起こらないはずである。これを確認しよう。以下では、一般の行為 $(u_{IP}, u_{IN}, u_{HP}, u_{HN})$ に付与される maximin 型期待効用水準の導出方法を一般的に述べ、続いてそれを行為 f および g ($(0, 1, u_{HP}, 0)$ および $(0, u_N, u_{HP}, u_N)$) に適用して両者の効用水準を比較する。

まず、 $\mathcal{D}$ と $\mathcal{D}^{\text{rect}}$ の、検査結果 (陽性反応もしくは陰性反応) で条件付けた確率分布は全く同一であることに注意しよう。すなわち、(21)–(24)により、

$$\{(p_{IP}, p_{HP}) | p \in \mathcal{D}\} = \{(q_{IP}, 1 - q_{IP}) | q_{IP} \in [\underline{q}_{IP}, \bar{q}_{IP}]\} = \{(p_{IP}, p_{HP}) | p \in \mathcal{D}^{\text{rect}}\},$$

$$\{(p_{IN}, p_{HN}) | p \in \mathcal{D}\} = \{(q_{IN}, 1 - q_{IN}) | q_{IN} \in [\underline{q}_{IN}, \bar{q}_{IN}]\} = \{(p_{IN}, p_{HN}) | p \in \mathcal{D}^{\text{rect}}\}$$

が成立する。したがって、陽性反応および陰性反応後の maximin 型期待効用水準は、それぞれ、

$$\min_{q_{IP} \in [\underline{q}_{IP}, \bar{q}_{IP}]} (q_{IP} u_{IP} + (1 - q_{IP}) u_{HP}), \quad (25)$$

$$\min_{q_{IN} \in [\underline{q}_{IN}, \bar{q}_{IN}]} (q_{IN} u_{IN} + (1 - q_{IN}) u_{HN}) \quad (26)$$

である。例 1 では、検査結果が陽性反応だった場合は f と g は確実に同じ帰結をもたらすので、 $u_{IP} = 0$ により

$$U(f) = \min_{q_{IP} \in [\underline{q}_{IP}, \bar{q}_{IP}]} (1 - q_{IP}) u_{HP} = U(g) \quad (27)$$

が成立する。他方、検査結果が陰性反応だった場合は、 f は実際に感染している場合にのみ帰結 1 をもたらす ($u_{IN} = 1$ かつ $u_{HN} = 0$) のに対し、 g は確実な帰結 u_N をもたらす ($u_{IN} = u_{HN} = u_N$) ので、

$$U(f) = \min_{q_{IN} \in [\underline{q}_{IN}, \bar{q}_{IN}]} q_{IN} u_{IN} = \underline{q}_{IN} < u_N = U(g) \quad (28)$$

が成立する。

次に、検査前の maximin 型期待効用水準を求めよう。行為 $(u_{IP}, u_{IN}, u_{HP}, u_{HN})$ から得られる maximin 型期待効用水準は

$$\min_{(p_{IP}, p_{IN}, p_{HP}, p_{HN}) \in \mathcal{D}^{\text{rect}}} (p_{IP} u_{IP} + p_{IN} u_{IN} + p_{HP} u_{HP} + p_{HN} u_{HN}) \quad (29)$$

である。(21)–(24)により、(18)–(20)に属する q_P 、 $q_{I|P}$ 、 $q_{I|N}$ を使って

$$\begin{aligned} & p_{IP}u_{IP} + p_{IN}u_{IN} + p_{HP}u_{HP} + p_{HN}u_{HN} \\ &= (p_{IP} + p_{HP})(p_{I|P}u_{IP} + p_{H|P}u_{HP}) + (p_{IN} + p_{HN})(p_{I|N}u_{IN} + p_{H|N}u_{HN}) \\ &= q_P(q_{I|P}u_{IP} + (1 - q_{I|P})u_{HP}) + (1 - q_P)(q_{I|N}u_{IN} + (1 - q_{I|N})u_{HN}) \end{aligned}$$

と書き換えることができる。したがって、(29)は

$$\min_{q_P \in [\underline{q}_P, \bar{q}_P]} \left(q_P \min_{q_{I|P} \in [\underline{q}_{I|P}, \bar{q}_{I|P}]} (q_{I|P}u_{IP} + (1 - q_{I|P})u_{HP}) + (1 - q_P) \min_{q_{I|N} \in [\underline{q}_{I|N}, \bar{q}_{I|N}]} (q_{I|N}u_{IN} + (1 - q_{I|N})u_{HN}) \right)$$

と等しい。ゆえに、(29) の最小化問題の解は、まず、(25) と (26) を解き、次にその値 u_P^* および u_N^* を (29) に代入して

$$\min_{q_P \in [\underline{q}_P, \bar{q}_P]} (q_P u_P^* + (1 - q_P) u_N^*) \quad (30)$$

を解けば求められる。

さて、 f と g の検査前の maximin 型期待効用水準を比較しよう。(27)により、 f と g において、 u_P^* の値は等しい。他方、(28)により、 u_N^* の値は、 f よりも g における方が大きい。したがって、検査前の maximin 型期待効用水準は、 g の方が大きい。これは検査前の選好順序は、陰性反応が得られた場合の選好順序と一致することを意味する。以上の議論で、状態空間上の確率分布の集合 $\mathcal{D}$ を、長方形的な集合 $\mathcal{D}^{\text{rect}}$ に置き換えると、検査後の選好順序は変わらないが、検査前の選好順序は検査後のそれと一致するように変わることがわかった。さらに、(30)により、検査前の maximin 型期待効用水準は、検査後の maximin 型期待効用水準から後退帰納法 (backward induction) で得られることもわかった。これは、長方形的な確率分布の集合が動学的一貫性と帰結主義という両方の合理性の条件を満足することを示している。すなわち、確率分布の集合を長方形的な集合に拡張することで、maximin 型期待効用関数の最適化問題は、期待効用関数の場合と同様に、後退帰納法で解くことができるので、動学的一貫性と帰結主義が保証されるのである。

最後に、 f の maximin 型期待効用水準を与える確率分布 ($\mathcal{D}^{\text{rect}}$ の要素) を与えよう。 u_{HP} の値を必要に応じてさらに大きくとることで、 $u_P^* > u_N^*$ と仮定できる。このとき、最小化問題(30)の解は $q_P = \underline{q}_P$ で与えられる。また、 $u_{IP} = 0 < u_{HP}$ なので、最小化問題(25)の解は $q_{I|P} = \bar{q}_{I|P}$ で与えられ、 $u_{IN} = 1 > 0 = u_{HN}$ なので、最小化問題(26)の解は $q_{I|N} = \underline{q}_{I|N}$ で与えられる。補題 1 により、 $(\underline{q}_P, \bar{q}_{I|P}, \underline{q}_{I|N})$ が定める確率分布 ($p_{IP}, p_{IN}, p_{HP}, p_{HN}$) は

$$\begin{aligned} p_{IP} &= \underline{q}_P \bar{q}_{I|P} = q_P(\underline{p}) q_{I|P}(\bar{p}) = \frac{q_P(\underline{p})}{q_P(\bar{p})} \bar{p} q_{P|I} = \frac{\underline{q}_P}{\bar{q}_P} \bar{p} q_{P|I}, \\ p_{IN} &= (1 - \underline{q}_P) \underline{q}_{I|N} = \bar{q}_N \underline{q}_{I|N} = q_N(\underline{p}) q_{I|P}(\underline{p}) = \underline{p} q_{N|I}, \\ p_{HP} &= \underline{q}_P (1 - \bar{q}_{I|P}) = \underline{q}_P \underline{q}_{H|P} = q_P(\underline{p}) q_{H|P}(\bar{p}) = \frac{q_P(\underline{p})}{q_P(\bar{p})} (1 - \bar{p}) q_{P|H} = \frac{\underline{q}_P}{\bar{q}_P} (1 - \bar{p}) q_{P|H}, \\ p_{HN} &= (1 - \underline{q}_P) (1 - \underline{q}_{I|N}) = \bar{q}_N \bar{q}_{H|N} = q_N(\underline{p}) q_{H|N}(\underline{p}) = (1 - \underline{p}) q_{N|H}. \end{aligned}$$

この結果では以下の 2 点に注意を喚起したい。まず、 q_P と $q_{I|N}$ を達成する感染率 p はいずれも下限 $\underline{p}$ なので、陰性反応の状態 IN および HN の事前確率は、ちょうど p が $\underline{p}$ に等しい場合の確率に一致する。次に、 p_{HP} は、 $\mathcal{P}$ のどの要素が HP に付与する事前確率よりも小さい。実際、 $(q_P/\bar{q}_P)(1-\bar{p})q_{P|H}$ は命題 2 の 3 の右辺の下限である。したがって、 $\mathcal{P}$ を $\mathcal{P}^{\text{rect}}$ に広げたことで得られた新たな確率分布が、実際に f の maximin 型期待効用水準を与えていることがわかる。

3.5 マルチンゲール性の欠如

Epstein and Halevy (2020) が指摘した、追加的情報が曖昧である場合のアップデートの特異性を、前節までの PCR 検査の例に基づいて紹介しよう。

まず、マルチンゲールと劣マルチンゲールの定義を想起しよう。一般に、確率過程（時間の経過とともに実現する確率変数の列） $(X^0, X^1, X^2, \dots)$ がマルチンゲールであるとは、任意の時刻 t および t' について、もし $t < t'$ ならば、 $X^t = E_t(X^{t'})$ が成立することを意味する。これは、現時点（ここでは t ）での確率過程の実現値は、常に、将来時点（ここでは t' ）での実現値の不偏推定量であることを意味する。また、劣マルチンゲールであるとは、もし $t < t'$ ならば、 $X^t \leq E_t(X^{t'})$ が成立することを意味する。これは、確率過程が将来時点（ここでは t' ）でとる値は、どの時点（ここでは t ）で評価しても、必ず上昇傾向にあることを意味する。本節では、確率過程が感染・非感染の確率であるとする。たとえば、（事前の）感染確率が $p \in [\underline{p}, \bar{p}]$ であるとき、陽性および陰性反応を示す確率は $q_P(p)$ および $q_N(p)$ であり、それぞれで条件付けた感染確率は $q_{I|P}(p)$ および $q_{I|N}(p)$ であるが、

$$q_P q_{I|P}(p) + q_N q_{I|N}(p) = p q_{P|I} + p q_{N|I}(p) = p,$$

$$q_P q_{H|P}(p) + q_N q_{H|N}(p) = (1-p) q_{P|H} + (1-p) q_{N|H}(p) = 1-p$$

が成立するので、感染確率 p と非感染確率 $1-p$ はいずれもマルチンゲールである。以下では、 $\mathcal{P}$ のように、複数の確率分布からなる集合においては、条件付き確率はマルチンゲールではなく、劣マルチンゲールであることを示す。

(10)と(14)から見てとれるように、被検者が感染しているという事象に意思決定主体が検査後に付与する確率（betting rate）は、検査結果にかかわらず、曖昧な事前確率 p がその最小値 $\underline{p}$ に一致するときにベイズ公式から導出される。よって、事前の感染確率を $\underline{p}$ とした場合、事後の感染確率はマルチンゲールである。詳しく言えば、

$$q_P(\underline{p}) q_{I|P} + q_N(\underline{p}) q_{I|N} = q_P(\underline{p}) q_{I|P}(\underline{p}) + q_N(\underline{p}) q_{I|N}(\underline{p}) = \underline{p} q_{P|I} + \underline{p} q_{N|I} = \underline{p}. \quad (31)$$

が成立する。同様に、被検者が感染していないという事象に意思決定主体が検査後に付与する確率は、検査結果にかかわらず、曖昧な事前確率 p がその最大値 $\bar{p}$ に一致するときにベイズ公式から導出される。よって、事前の感染確率を $\bar{p}$ とした場合、事後の非感染確率はマルチンゲールである。詳しく言えば、

$$q_P(\bar{p})q_{H|P} + q_N(\bar{p})q_{H|N} = q_P(\bar{p})q_{H|P}(\bar{p}) + q_N(\bar{p})q_{H|N}(\bar{p}) = (1 - \bar{p})q_{P|H} + (1 - \bar{p})q_{N|H} = 1 - \bar{p}. \quad (32)$$

が得られる。このように、感染確率と非感染確率のいずれもマルチンゲールではあるが、それらが異なる事前確率 $\underline{p}$ および $\bar{p}$ についてのマルチンゲールである点が、通常のマルチンゲールの定義とは異なる。以下の命題は、ある適当な（共通の）事前確率分布の元ではいずれも劣マルチンゲールであることを示す。

命題 3 $p^* = (1/2)\underline{p} + (1/2)\bar{p} \in [\underline{p}, \bar{p}]$ とおくと

$$q_P(p^*)q_{I|P}(\underline{p}) + q_N(p^*)q_{I|N}(\underline{p}) > \underline{p}, \quad (33)$$

$$q_P(p^*)q_{H|P}(\bar{p}) + q_N(p^*)q_{H|N}(\bar{p}) > 1 - \bar{p} \quad (34)$$

が成立する。

(33)および(34)は、感染の事前確率が $(1/2)\underline{p} + (1/2)\bar{p}$ であるとき、感染確率と非感染確率のいずれもが劣マルチンゲール (submartingale) であることを示している。つまり、追加的情報がいずれの確率も平均的に押し上げることを示している。この劣マルチンゲール性を、Epstein and Halevy (2020) はシグナル（検査）の曖昧さ (signal ambiguity) 愛好性 (affinity) と呼んだ。PCR 検査が曖昧なので、いかなる事象の事後確率も事前確率を上回るという、標準的なベイズの公式によるアップデートにはない現象を指す用語である。

上述の議論では、状態空間上の確率分布の集合 $\mathcal{D}$ において、検査結果で条件付けた感染・非感染確率の劣マルチンゲール性を得たが、長方形的な確率分布の集合 $\mathcal{D}^{\text{rect}}$ においても同様の劣マルチンゲール性が得られる。これは、 $\mathcal{D}$ と $\mathcal{D}^{\text{rect}}$ において、検査結果で条件付けた感染・非感染確率は同じ範囲の値をとり、なおかつ、 $\mathcal{D}^{\text{rect}}$ においても、 $(q_P(p^*), q_N(p^*))$ は検査結果の周辺分布のひとつだからである。このことから、動学的一貫性と帰結主義を保証するために確率分布の集合を長方形的な集合に拡張しても、意思決定主体は依然としてシグナルの曖昧さについて愛好的であることを意味する。換言すれば、シグナルの曖昧さに関する愛好性は、動学的一貫性と帰結主義からは独立に成り立ち得るのである。

3.6 政策評価への応用

本節では、感染や隔離に付随する費用や効用を明示的に取り扱い、自主隔離の要請などの施策の社会的費用・効用を定義し、特に、陽性反応を示した被検者には自主隔離を要請し、陰性反応を示した被検者には自由行動を許容する施策を評価する。この評価だけでは最適政策を決定することはできないが、その方法を他の施策にも援用することは可能なので、最適政策決定の一助となるだろう。特に、Manski (2019) が指摘しているように、古典的統計学における検定や推定だけでは、不確実性下の最適な意思決定を実現することはできない。本節の分析の目的は、帰結の評価を前節までの分析の枠組に取り込むことにある。Manski (2019) と同様に本節でも minimax 型期待後悔 (regret) 型関数を目的関数のひ

とつとしてとり上げるが、Manski (2019) とは異なり、意思決定の動学的一貫性を保証するために、後退帰納法で政策を評価することにする。

まず、各帰結の社会的費用を c_{IQ} , c_{IF} , c_{HQ} , c_{HF} で表すことにする。これらの社会的費用は感染者が自由に行動することで他者が感染することによる社会的費用や、実際には感染していない被検者が隔離されることによる経済的・精神的費用をすべて含めたものとする。ここでは、以下の仮定をおく。

仮定 2

$$c_{HF} < c_{HQ} < c_{IQ} < c_{IF}. \quad (35)$$

この不等式は、まず、感染していることに付随する社会的費用（感染者本人が被る経済的・精神的費用や看護・治療に要する費用を含む）があることを意味する。次に、 $c_{HF} < c_{HQ}$ は、非感染者を（不要だが）隔離することによる経済的・精神的費用が存在することを表し、 $c_{IQ} < c_{IF}$ は感染者を（必要だが）隔離しないことによる感染蔓延などの社会的費用が、隔離に伴う経済的・精神的費用などより大きいことを意味する。 c_{IQ} , c_{IF} , c_{HQ} , c_{HF} は全て費用を表すので、社会的な効用（例 1 で u_{HP} や u_N を使って表したもの）は、それらに -1 を掛けた $-c_{IQ}$, $-c_{IF}$, $-c_{HQ}$, $-c_{HF}$ である。したがって、maximin 型期待効用水準を求めることは、minimax 型期待費用を求めることに他ならない。

表 2 にあるように、検査結果で隔離の可否を決める場合、帰結はその表の中央の列の通りである。以下ではこの行為を、まず、minimax 型期待費用を用いて評価し、次に minimax 型期待後悔を用いて評価する。

命題 4 仮定 2 の下で、

$$\begin{aligned} & \max_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} (pq_{P|I}c_{IQ} + p(1 - q_{P|I})c_{IF} + (1 - p)q_{P|H}c_{HQ} + (1 - p)q_{N|H}c_{HF}) \\ &= \bar{p}q_{P|I}c_{IQ} + \bar{p}q_{N|I}c_{IF} + (1 - \bar{p})q_{P|H}c_{HQ} + (1 - \bar{p})q_{N|H}c_{HF}. \end{aligned} \quad (36)$$

この命題は、陽性反応の場合のみ自主隔離を要請するという政策の検査前での費用（負の効用）は、 $\bar{p}$ の下での費用の期待値に等しいことを意味する。

次に、PCR 検査の結果が判明した後にはどのようにこの政策を評価するかを考えよう。

命題 5 仮定 2 の下で、

1.

$$\max_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} (q_{I|P}(p)c_{IQ} + q_{H|P}(p)c_{HQ}) = q_{I|P}(\bar{p})c_{IQ} + q_{H|P}(\bar{p})c_{HQ}, \quad (37)$$

$$\max_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} (q_{I|N}(p)c_{IF} + q_{H|N}(p)c_{HF}) = q_{I|N}(\bar{p})c_{IF} + q_{H|N}(\bar{p})c_{HF}. \quad (38)$$

2. もし

$$q_{I|P}(\bar{p})c_{IQ} + q_{H|P}(\bar{p})c_{HQ} \geq q_{I|N}(\bar{p})c_{IF} + q_{H|N}(\bar{p})c_{HF} \quad (39)$$

が成立するならば、

$$\begin{aligned} & \max_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} (q_P(p) (q_{I|P}(\bar{p})c_{IQ} + q_{H|P}(\bar{p})c_{HQ}) + q_N(p) (q_{I|N}(\bar{p})c_{IF} + q_{H|N}(\bar{p})c_{HF})) \\ &= q_P(\bar{p}) (q_{I|P}(\bar{p})c_{IQ} + q_{H|P}(\bar{p})c_{HQ}) + q_N(\bar{p}) (q_{I|N}(\bar{p})c_{IF} + q_{H|N}(\bar{p})c_{HF}) \\ &= \bar{p}q_{P|I}c_{IQ} + \bar{p}q_{N|I}c_{IF} + (1 - \bar{p})q_{P|H}c_{HQ} + (1 - \bar{p})q_{N|H}c_{HF}. \end{aligned}$$

が成立する。他方、もし

$$q_{I|P}(\bar{p})c_{IQ} + q_{H|P}(\bar{p})c_{HQ} \leq q_{I|N}(\bar{p})c_{IF} + q_{H|N}(\bar{p})c_{HF} \quad (40)$$

が成立するならば、

$$\begin{aligned} & \max_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} (q_P(p) (q_{I|P}(\bar{p})c_{IQ} + q_{H|P}(\bar{p})c_{HQ}) + q_N(p) (q_{I|N}(\bar{p})c_{IF} + q_{H|N}(\bar{p})c_{HF})) \\ &= q_P(\underline{p}) (q_{I|P}(\bar{p})c_{IQ} + q_{H|P}(\bar{p})c_{HQ}) + q_N(\underline{p}) (q_{I|N}(\bar{p})c_{IF} + q_{H|N}(\bar{p})c_{HF}) \\ &= \frac{q_P(\underline{p})}{q_P(\bar{p})} \bar{p}q_{P|I}c_{IQ} + \frac{q_N(\underline{p})}{q_N(\bar{p})} \bar{p}q_{N|I}c_{IF} + \frac{q_P(\underline{p})}{q_P(\bar{p})} (1 - \bar{p})q_{P|H}c_{HQ} + \frac{q_N(\underline{p})}{q_N(\bar{p})} (1 - \bar{p})q_{N|H}c_{HF}. \end{aligned} \quad (41)$$

が成立する。

この命題の 1 は、検査結果(陽性または陰性)にかかわらず、**minimax** 型期待費用 (**maximin** 型期待効用) 関数が評価する社会的費用は事前の感染確率の最大値 $\bar{p}$ の下での期待値に等しいことを主張する。2 は、陽性反応もしくは陰性反応のどちらの場合に大きいかに応じて、後退帰納法で事前の社会的費用を求めるために使われる事前確率は $\bar{p}$ と $\underline{p}$ のどちらでもあり得ることを意味する。(39)は、陽性反応の後の費用の期待値の方が、陰性反応の後の費用の期待値よりも大きいことを意味する。もし(39)が成立するならば、**minimax** 型期待費用は、最大の事前確率 $\bar{p}$ の下で後退帰納法で求められる検査前の期待値に一致するが、検査後にもこの事前確率が使われるので、社会的費用は常に事前確率 $\bar{p}$ の下で評価されることを意味する。これは、命題 4 で求めた社会的費用(36)と等しく、したがって、検査結果という情報の開示が(どのような集団を検査の対象とするか等に関わる)意思決定には影響を及ぼさないことを意味する。他方、もし(40)が成立するならば、**minimax** 型期待費用は、最小の事前確率 $\underline{p}$ の下で後退帰納法で求められる検査前の期待値に一致するが、これは(36)よりも大きい。費用 $c_{IQ}, c_{IF}, c_{HQ}, c_{HF}$ および条件付き確率 $q_{I|P}(\bar{p}), q_{H|P}(\bar{p}), q_{I|N}(\bar{p}), q_{H|N}(\bar{p})$ についての仮定としては(39)の方が妥当であろうが、(41)は、検査結果に基づいて後退帰納法で費用を算出すると、そうでない場合に比べて期待費用が大きく評価されることを示している点で重要である。

次に、この政策の **minimax** 型期待後悔を求めよう。**minimax** 型期待後悔とは、それぞれの状態での最適な帰結から得られる効用と、その行為が与える効用の差の期待値の、確率

分布の集合 $\mathcal{D}$ の中での最大値として定義される。ここで最適な行動は、「感染しているならば隔離し、感染していなければ自由行動」なので、(IP, IN, HP, HN) での後悔は、それぞれ、 $(0, c_{IF} - c_{IQ}, c_{HQ} - c_{HF}, 0)$ である。以下の議論では次の仮定もおく。

仮定 3 $q_{P|I} < q_{N|H}$.

この仮定は、検査の特異度が感度を上回ることを意味する。3.1 節の数値例はこの仮定を満たす。

命題 6 仮定 2 と 3 の下で、

$$\begin{aligned} & \max_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} (pq_{N|I}(c_{IF} - c_{IQ}) + (1-p)q_{P|H}(c_{HQ} - c_{HF})) \\ &= \bar{p}q_{N|I}(c_{IF} - c_{IQ}) + (1-\bar{p})q_{P|H}(c_{HQ} - c_{HF}). \end{aligned} \quad (42)$$

この命題は、事前の minimax 型期待後悔の期待値は、 $\bar{p}$ の下での後悔の期待値に等しいことを意味する。

次に、PCR 検査の結果が判明した後にはどのようにこの政策を評価するかを考えよう。

命題 7 仮定 2 と 3 の下で、

1.

$$\max_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} q_{H|P}(p)(c_{HQ} - c_{HF}) = q_{H|P}(\underline{p})(c_{HQ} - c_{HF}), \quad (43)$$

$$\max_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} q_{I|N}(p)(c_{IF} - c_{IQ}) = q_{I|N}(\bar{p})(c_{IF} - c_{IQ}) \quad (44)$$

2. もし、

$$q_{H|P}(\underline{p})(c_{HQ} - c_{HF}) \geq q_{I|N}(\bar{p})(c_{IF} - c_{IQ}) \quad (45)$$

が成立するならば、

$$\begin{aligned} & \max_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} (q_P(p)q_{H|P}(p)(c_{HQ} - c_{HF}) + q_N(p)q_{I|N}(\bar{p})(c_{IF} - c_{IQ})), \\ &= \bar{p}q_{N|I}(c_{IF} - c_{IQ}) + q_P(\bar{p})q_{H|P}(\underline{p})(c_{HQ} - c_{HF}) \\ &= \bar{p}q_{N|I}(c_{IF} - c_{IQ}) + \frac{q_{H|P}(\underline{p})}{q_{H|P}(\bar{p})}(1-\bar{p})q_{P|H}(c_{HQ} - c_{HF}). \end{aligned} \quad (46)$$

が成立する。他方、もし、

$$q_{H|P}(\underline{p})(c_{HQ} - c_{HF}) \leq q_{I|N}(\bar{p})(c_{IF} - c_{IQ}) \quad (47)$$

ならば、

$$\begin{aligned}
 & \max_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} (q_P(p)q_{H|P}(\underline{p})(c_{HQ} - c_{HF}) + q_N(p)q_{I|N}(\bar{p})(c_{IF} - c_{IQ})), \\
 &= q_P(\underline{p})q_{H|P}(\underline{p})(c_{HQ} - c_{HF}) + q_N(\underline{p})q_{I|N}(\bar{p})(c_{IF} - c_{IQ}) \\
 &= \frac{q_{I|N}(\bar{p})}{q_{I|N}(\underline{p})} \underline{p} q_{N|I}(c_{IF} - c_{IQ}) + (1 - \underline{p}) q_{P|H}(c_{HQ} - c_{HF}). \tag{48}
 \end{aligned}$$

が成立する。

この命題の 1 は、検査結果が陽性反応だった場合は、(条件付き) minimax 型期待後悔は事前の感染確率の最小値 $\underline{p}$ の下での期待値であるのに対し、陰性反応だった場合は、最大値 $\bar{p}$ の下での期待値であることに注意しよう。2 は、1 で導出した (条件付き) minimax 型期待後悔のいずれが大きいかに応じて、これらの事前の評価を与える。特に、もし陽性反応の場合の条件付き期待値の方が大きければ、(事前の) minimax 型期待後悔は $\bar{p}$ の下での期待値である。他方、もし陰性反応の場合の条件付き期待値の方が大きければ、(事前の) minimax 型期待後悔は $\underline{p}$ の下での期待値である。(46)の第 1 項 $\bar{p}q_{N|I}(c_{IF} - c_{IQ})$ は、(42)の第 1 項と同じであるが、第 2 項については、 $q_{H|P}(p)$ が p の単調減少関数なので、(46)の第 2 項の方が大きい。よって、minimax 型期待後悔の事前の期待値は、(42)を上回る。(48)は (事前の) minimax 型期待後悔は $\underline{p}$ の下での期待値を上回ることを示すが、さらに、(42)より大きいことも示している。なぜなら、(47)が成り立つならば、これは(46)より大きいのだが、既に見たように、後者は(42)より大きいからである。よって、この場合も、minimax 型期待後悔の事前の期待値は、(42)を上回る。

命題 5 と命題 7 を比べると、(事前の) 感染率を一意に定められないという曖昧さは、minimax 型期待後悔の評価に大きな影響を及ぼすことが見てとれる。実際、minimax 型期待費用 (maximin 型期待効用に -1 を乗じたもの) が(36)より大きい (maximin 型期待効用水準は低い) のは(40)が成立する場合に限られるのに対し、minimax 型期待後悔は、(45)と(47)のいずれが成立する場合でも、(42)を上回るのである。これは、minimax 型期待費用の場合とは異なり、minimax 型期待後悔の場合は、検査結果に応じて (条件付き) minimax 型期待後悔を与える事前の感染確率が違う (陽性反応の場合は $\underline{p}$ 、陰性反応の場合は $\bar{p}$) ので、PCR 検査という追加的情報を加味しない評価(42)のように、ひとつの事前確率の下で後退帰納法を適用しても minimax 効用は導出できないのである。これは、動学的一貫性を保証するために状態空間上の確率分布の集合 $\mathcal{D}$ を長方形的な集合 $\mathcal{D}^{\text{rect}}$ に拡張する必要があることの証左である。

以下では、3.1 節での数値例を使って minimax 型期待費用と minimax 型期待後悔を求めよう。

$$\begin{aligned}
 \underline{p} &= 0.01 \text{ (想定する感染率の最小値)} \\
 \bar{p} &= 0.15 \text{ (想定する感染率の最大値)} \\
 q_{P|I} &= 0.7 \text{ (感度)} \\
 q_{N|H} &= 0.99 \text{ (特異度)}
 \end{aligned}$$

とおく。また、費用 $c_{IQ}, c_{IF}, c_{HQ}, c_{HF}$ は、意思決定時点での発症者数や病床の使用割合、さらには失業率や前年比の GDP 減少率のなどにも依存するので、その計測や推定は別の機会に譲ることとし、本節では引き続き仮定 2 を課すとし、その数値に追加的な仮定はおかない。ただし、共通の定数を引き、その後共通の正の定数をかけても最大化・最小化問題の解はかわらないので、仮定 2 の下で $c_{HF} = 0$ および $c_{IF} = 1$ を仮定する。

このとき、命題 4 で得られた、minimax 型期待費用（maximin 型期待効用水準に -1 を乗じたもの）は

$$\bar{p}q_{P|I}c_{IQ} + \bar{p}q_{N|I}c_{IF} + (1 - \bar{p})q_{P|H}c_{HQ} + (1 - \bar{p})q_{N|H}c_{HF} = 0.045 + 0.105c_{IQ} + 0.0085c_{HQ} \quad (49)$$

である。また、

$$\begin{aligned} q_{I|P}(\bar{p})c_{IQ} + q_{H|P}(\bar{p})c_{HQ} &= 0.925c_{IQ} + 0.075c_{HQ} \\ q_{I|N}(\bar{p})c_{IF} + q_{H|N}(\bar{p})c_{HF} &= 0.051 \end{aligned}$$

なので、もし $0.925c_{IQ} + 0.075c_{HQ} \geq 0.051$ ならば、命題 5 で求められた検査前の minimax 型期待費用は

$$0.045 + 0.105c_{IQ} + 0.0085c_{HQ}$$

であり、他方、もし $0.925c_{IQ} + 0.075c_{HQ} \leq 0.051$ ならば、命題 5 で求められた検査前の minimax 型期待費用は

$$\begin{aligned} \frac{q_P(p)}{q_P(\bar{p})}\bar{p}q_{P|I}c_{IQ} + \frac{q_N(p)}{q_N(\bar{p})}\bar{p}q_{N|I}c_{IF} + \frac{q_P(p)}{q_P(\bar{p})}(1 - \bar{p})q_{P|H}c_{HQ} + \frac{q_N(p)}{q_N(\bar{p})}(1 - \bar{p})q_{N|H}c_{HF} & \quad (50) \\ = 0.0499 + 0.0156c_{IQ} + 0.0013c_{HQ} & \quad (51) \end{aligned}$$

である。これを(49)と比較すると、帰結 IF が得られる状態 IN と帰結 IQ が得られる状態 IP に付与される確率が上がることで期待費用が上がったことが見てとれる。

次に、命題 6 で求められた検査前の minimax 型期待後悔と、命題 7 で求められた検査前の minimax 型期待後悔を比べよう。命題 6 で求められた検査前の maximin 後悔は

$$\bar{p}q_{N|I}(c_{IF} - c_{IQ}) + (1 - \bar{p})q_{P|H}(c_{HQ} - c_{HF}) = 0.045(1 - c_{IQ}) + 0.0085c_{HQ} \quad (52)$$

である。また、

$$q_{H|P}(\bar{p})(c_{HQ} - c_{HF}) = 0.5858c_{HQ}, \quad (53)$$

$$q_{I|N}(\bar{p})(c_{IF} - c_{IQ}) = 0.0505(1 - c_{IQ}) \quad (54)$$

なので、もし $0.5858c_{HQ} \geq 0.0505(1 - c_{IQ})$ ならば、命題 7 で求められた検査前の minimax 型期待後悔は

$$0.045(1 - c_{IQ}) + 0.0665c_{HQ}$$

である。この場合は、(52)と比べて、状態 HP（偽陽性）により高い確率を付与して後悔の期待値が求められることがわかる。他方、もし $0.5858c_{HQ} \leq 0.0505(1 - c_{IQ})$ ならば、命題 7 で求められた検査前の minimax 型期待後悔は

$$0.0499(1 - c_{IQ}) + 0.0085c_{HQ}$$

である。この場合は、状態 IN（偽陰性）により高い確率を付与していることがわかる。

4. 結論

乳がん検診などの他の臨床検査と同様に、COVID-19 の感染の有無を判定するための PCR 検査も、偽陽性や偽陰性といった、誤った結果を出す可能性がある。しかし、新型コロナウイルスという呼称からも明らかな通り、COVID-19 にはまだ症例の十分な蓄積がないので、事前の感染確率が不明である。図 4 の 3 つの例のように、想定した事前の感染確率に応じて、ベイズの公式から、検査結果に応じた感染の条件付き確率を導出することは可能であるが、このような結果をいくら集めても、それらをどのように実際の意志決定に結びつけるかは自明ではない。例えば、第 2 節で取り上げたように、事前の感染確率は 1%か 15%の間にあるとした場合、中間値である 8 %を想定してベイズの公式から偽陽性などの確率を導出し、それに基づいて（条件付き）期待効用を最大化しても、到底適切な意志決定を行えるとは言えない。この方法では、8 %という事前の感染確率を信頼するに足る理由がなく、意志決定者にはそのような曖昧さを回避する傾向があることを無視してしまうからである。

本論文では、PCR 検査結果を踏まえた政策を、このような信頼できる確率分布が存在しない環境での評価する方法を提案した。そこでは、まず、状態空間上で想定しうる確率分布の集合を与えて maximin 型期待効用関数を定義し、各行為は maximin 型期待効用水準で評価することとした。また、PCR 検査のように、感染の有無に関する情報が追加的に得られる場合には、合理的な意思決定のためには、選択の動学的の一貫性を保証することが不可欠であるが、本研究では動学的の一貫性を保証すると、偽陽性や偽陰性といった、誤った検査結果に想定すべき範囲が広がることも示した。さらに、Manski (2019) の提言に沿って、各帰結の費用や便益を加味した上で、施術や政策を評価する方法を例示した。

本論文で得た施術や政策の評価方法は、患者や被検者、医療従事者や政策当局が直面する状況を描写する意志決定問題の一部である。本論文では採り上げなかったが、COVID-19 の場合、政策当局者は、ロックダウンのような強硬な方策を採るか、それとも飲食店に営業自粛や住民の不要不急の外出の自粛を求めるに止めるか、といった選択に直面する。このとき、いずれの政策を採るかに応じて、起こり得る帰結の費用と便益を正しく推定し、本論文で考察した確率評価に基づいて maximin 型期待効用や minimax 型期待後悔を求める必要がある。本論文の貢献は、この段階で利用される確率評価の性質を明らかにした。

参考文献

- [1] 小峰隆夫 (2020) 「PCR 検査は増やすべきか」 日本経済研究センター2020 年 6 月 16 日「小峰隆夫の私が見てきた日本経済史」(第 81 回) URL:<https://www.jcer.or.jp/j-column/column-komine/20200616-2.html>
- [2] 宮田靖志 (2009) 「医師と製薬会社との関係に関するインターネット調査」『医学教育』40(2), pp.95–104.
- [3] 宮田靖志 (2010) 「日常臨床における利益相反 製薬会社との適切な関係構築に向けて」『日本内科学会雑誌』99(12), pp.3112-3118.
- [4] Eichberger, Jürgen, Simon Grant, and Devid Kelsey (2007) “Updating Choquet Beliefs,” *Journal of Mathematical Economics*, 43, pp. 888–899.
- [5] Ellsberg, Daniel (1961) “Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms,” *The Quarterly Journal of Economics*, 75(4), pp. 643–669.
- [6] Epstein, Larry G., and Yoram Halevy (2020) “Hard-to-Interpret Signals,” manuscript.
- [7] Epstein, Larry G., and Martin Schneider (2003) “Recursive Multiple-Priors,” *Journal of Economic Theory*, 113, pp. 1–31.
- [8] Horie, Mayumi (2013) “Reexamination on Updating Choquet Beliefs,” *Journal of Mathematical Economics*, 49, pp. 467–470.
- [9] Manski, Charles F. (2019) *Patient Care under Uncertainty*, Princeton University Press.
- [10] OECD (2019) *OECD Reviews of Public Health: Japan: A Healthier Tomorrow*, OECD Publishing.
- [11] Pires, Cesltina P. (2002) “A Rule for Updating Ambiguous Beliefs,” *Theory and Decision* 53, pp. 137–152.
- [12] Savage, Leonard J. (1954) *The Foundations of Statistics*, John Wiley and Sons.
- [13] Schmeidler, David (1989) “Subjective Probability without Additivity,” *Econometrica* 57(3), pp. 571–587.

付論

補題 1 の証明 $q_{P|I} > q_{P|H}$ が仮定されているので、 $q_P(p)$ は p の増加関数である。これより (6) と (7) が従う。 $q_{N|I} < q_{N|H}$ なので、 $q_N(p)$ は p の減少関数である。これより (8) と (9) が従う。

$q_{P|I} > q_{P|H}$ より、 $q_{I|P}(p)$ は p の増加関数である。これより (10) と (11) が従う。また、 $q_{H|P}(p)$ は p の減少関数であることより、(12) と (13) が従う。他の等式も同様に示される。

///

例 1 の証明 まず、陰性反応後には行為 g は必ず効用水準 u_N をもたらすので、 $U(g) = u_N$ が成立する。行為 f から得られる効用水準は、条件付き確率 $q_{I|N}(p)$ および $q_{H|N}(p)$ を使って

$$U(f) = \min_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} (q_{I|N}(p) \times 1 + q_{H|N}(p) \times 0) = \min_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} q_{I|N}(p)$$

と書き表すことができる。 $q_{I|N}(p)$ は p の増加関数なので、この最小値は p が $\underline{p}$ に一致するときに達成される。よって、 $U(f) = q_{I|N}(\underline{p})$ が成立するが、仮定により $q_{I|N}(\underline{p}) < u_N$ が成立するので、 $U(f) < U(g)$ が得られる。すなわち、陰性反応後は g の方が好ましい。

次に、事前の minimax 型期待効用水準を求めよう。 f から得られる minimax 型期待効用水準は

$$\begin{aligned} & \min_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} (q_{IP}(p) \times 0 + q_{IN}(p) \times 1 + q_{HP}(p)u_{HP} + q_{HN}(p) \times 0) \\ &= \min_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} (pq_{N|I} + (1-p)q_{P|H}u_{HP}) \end{aligned}$$

であるが、 $u_{HP} > q_{N|I}/q_{P|H}$ が成立するので、 $q_{N|I} - q_{P|H}u_{HP} < 0$ が成立する。よって、上記の最小値は p が $\bar{p}$ に一致するときに達成される。したがって、検査前には

$$U(f) = \bar{p}q_{N|I} + (1-\bar{p})q_{P|H}u_{HP}$$

が成立する。 g から得られる minimax 型期待効用水準は

$$\begin{aligned} & \min_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} (q_{IP}(p) \times 0 + q_{IN}(p)u_N + q_{HP}(p)u_{HP} + q_{HN}(p)u_N) \\ &= \min_{p \in [\underline{p}, \bar{p}]} (pq_{N|I}u_N + (1-p)q_{P|H}u_{HP} + (1-p)q_{N|H}u_N) \end{aligned}$$

であるが、 $u_{HP} > q_{N|I}/q_{P|H}$ が成立するので、

$$q_{N|I} - q_{P|H}u_{HP} - q_{N|H}u_N < q_{N|I} - q_{P|H}u_{HP} < 0$$

が成立する。よって、上記の最小値は p が $\bar{p}$ に一致するときに達成される。したがって、検査前には

$$U(g) = \bar{p}q_{N|I}u_N + (1-\bar{p})q_{P|H}u_{HP} + (1-\bar{p})q_{N|H}u_N$$

が成立する。よって、検査前には

$$\begin{aligned} U(f) - U(g) &= \bar{p}q_{N|I} - (\bar{p}q_{N|I} + (1-\bar{p})q_{N|H})u_N \\ &= (\bar{p}q_{N|I} + (1-\bar{p})q_{N|H})(q_{I|N}(\bar{p}) - u_N) \end{aligned}$$

が成立する。 $u_N < q_{I|N}(\bar{p})$ が成立するので、 $U(f) - U(g) > 0$ が成立する。 ///

命題2の証明 1. (21)より、 $\{p_{IP} \mid p \in \mathcal{P}^{\text{rect}}\} = [\underline{q}_P \underline{q}_{I|P}, \bar{q}_P \bar{q}_{I|P}]$ であるが、(6)と(10)、より

$$\underline{q}_P \underline{q}_{I|P} = q_P(\underline{p}) q_{I|P}(\underline{p}) = q_{IP}(\underline{p}) = \underline{p} q_{P|I},$$

が得られ、(7)と(11)より

$$\bar{q}_P \bar{q}_{I|P} = q_P(\bar{p}) q_{I|P}(\bar{p}) = q_{IP}(\bar{p}) = \bar{p} q_{P|I}$$

が得られる。

2. (22)より $\{p_{IN} \mid p \in \mathcal{P}^{\text{rect}}\} = [(1 - \bar{q}_P) \underline{q}_{I|N}, (1 - \underline{q}_P) \bar{q}_{I|N}]$ であるが、(7)、(14)、(9)より

$$(1 - \bar{q}_P) \underline{q}_{I|N} = \underline{q}_N q_{I|N}(\underline{p}) = \underline{q}_N \frac{\underline{p} q_{N|I}}{\underline{p} q_{N|I} + (1 - \underline{p}) q_{N|H}} = \frac{\underline{q}_N}{\underline{q}_N} \underline{p} q_{N|I}$$

が得られ、(6)、(15)、(8)より、

$$(1 - \underline{q}_P) \bar{q}_{I|N} = \bar{q}_N q_{I|N}(\bar{p}) = \bar{q}_N \frac{\bar{p} q_{N|I}}{\bar{p} q_{N|I} + (1 - \bar{p}) q_{N|H}} = \frac{\bar{q}_N}{\underline{q}_N} \bar{p} q_{N|I}$$

が得られる。

3. (23)より、 $\{p_{HP} \mid p \in \mathcal{P}^{\text{rect}}\} = [\underline{q}_P(1 - \bar{q}_{I|P}), \bar{q}_P(1 - \underline{q}_{I|P})]$ であるが、(12)と(7)より

$$\underline{q}_P(1 - \bar{q}_{I|P}) = \underline{q}_P \underline{q}_{H|P} = \underline{q}_P q_{H|P}(\bar{p}) = \underline{q}_P \frac{(1 - \bar{p}) q_{P|H}}{\bar{p} q_{P|I} + (1 - \bar{p}) q_{P|H}} = \frac{\underline{q}_P}{\bar{q}_P} (1 - \bar{p}) q_{P|H}$$

が得られ、(7)と(12)より、

$$\bar{q}_P(1 - \underline{q}_{I|P}) = \bar{q}_P \bar{q}_{H|P} = \bar{q}_P q_{H|P}(\underline{p}) = \bar{q}_P \frac{(1 - \underline{p}) q_{P|H}}{\underline{p} q_{P|I} + (1 - \underline{p}) q_{P|H}} = \frac{\bar{q}_P}{\underline{q}_P} (1 - \underline{p}) q_{P|H}$$

が得られる。

4.(24)より、 $\{p_{HN} \mid p \in \mathcal{P}^{\text{rect}}\} = [(1 - \bar{q}_P)(1 - \bar{q}_{I|N}), (1 - \underline{q}_P)(1 - \underline{q}_{I|N})]$ が成立するが、(7)と(15)より

$$(1 - \bar{q}_P)(1 - \bar{q}_{I|N}) = (1 - q_P(\bar{p}))(1 - q_{I|N}(\bar{p})) = q_N(\bar{p}) q_{H|N}(\bar{p}) = q_{HN}(\bar{p}) = (1 - \bar{p}) q_{N|H}$$

が得られ、(6)と(14)より

$$(1 - \underline{q}_P)(1 - \underline{q}_{I|N}) = (1 - q_P(\underline{p}))(1 - q_{I|N}(\underline{p})) = q_N(\underline{p}) q_{H|N}(\underline{p}) = q_{HN}(\underline{p}) = (1 - \underline{p}) q_{N|H}$$

が得られる。 ///

命題3の証明 $q_P(p^*) + q_N(p^*) = 1$ 、 $q_P(p^*) > q_P(\underline{p})$ 、 $q_{IP}(\underline{p}) > q_{I|N}(\underline{p})$ なので、(31)より(33)が従う。また、 $q_N(p^*) > q_N(\bar{p})$ 、 $q_{HP}(\bar{p}) < q_{H|N}(\bar{p})$ なので、(32)より(34)が従う。 ///

命題 4 の証明 事前の感染確率が p であるとする、検査前の費用の期待値は

$$\begin{aligned} & p q_{P|I} c_{IQ} + p(1 - q_{P|I}) c_{IF} + (1 - p)(1 - q_{N|H}) c_{HQ} + (1 - p) q_{N|H} c_{HF} \\ &= p q_{P|I} c_{IQ} + p q_{N|I} c_{IF} + (1 - p) q_{P|H} c_{HQ} + (1 - p) q_{N|H} c_{HF} \\ &= q_{P|H} c_{HQ} + q_{N|H} c_{HF} + \left((q_{P|I} c_{IQ} + q_{N|I} c_{IF}) - (q_{P|H} c_{HQ} + q_{N|H} c_{HF}) \right) p \end{aligned}$$

である。(35)および $q_{P|I} + q_{N|I} = 1 = q_{P|H} + q_{N|H}$ により、 p の係数 $(q_{P|I} c_{IQ} + q_{N|I} c_{IF}) - (q_{P|H} c_{HQ} + q_{N|H} c_{HF})$ は正である。よって、 $\bar{p}$ において minimax 型期待費用 (maximin 型期待効用水準) が達成されるので、(36)が成立する。 ///

命題 5 の証明 1. 事前の感染確率が p であるとした場合、陽性反応後の社会的費用の（条件付き）期待値は

$$q_{I|P}(p) c_{IQ} + q_{H|P}(p) c_{HQ} = c_{HQ} + q_{I|P}(p) (c_{IQ} - c_{HQ})$$

である。 $q_{I|P}(p)$ は p の増加関数であり、 $c_{IQ} - c_{HQ} \geq 0$ なので、 $\bar{p}$ で上記の期待値は最大化される。陰性反応後の社会的費用の（条件付き）期待値は

$$q_{I|N}(p) c_{IF} + q_{H|N}(p) c_{HF} = c_{HF} + q_{I|N}(p) (c_{IF} - c_{HF})$$

である。 $q_{I|N}(p)$ は p の増加関数であり、 $c_{IF} - c_{HF} \geq 0$ なので、 $\bar{p}$ で上記の期待値は最大化される。

2. (37)および(38)により、仮に事前の感染確率が p であるとする、この政策の期待費用は

$$\begin{aligned} & q_P(p) (q_{I|P}(\bar{p}) c_{IQ} + q_{H|P}(\bar{p}) c_{HQ}) + q_N(p) (q_{I|N}(\bar{p}) c_{IF} + q_{H|N}(\bar{p}) c_{HF}) \\ &= (q_{I|N}(\bar{p}) c_{IF} + q_{H|N}(\bar{p}) c_{HF}) + q_P(p) \left((q_{I|P}(\bar{p}) c_{IQ} + q_{H|P}(\bar{p}) c_{HQ}) - (q_{I|N}(\bar{p}) c_{IF} + q_{H|N}(\bar{p}) c_{HF}) \right) \end{aligned}$$

である。(39)が成立するならば、 $q_P(p)$ の係数

$$(q_{I|P}(\bar{p}) c_{IQ} + q_{H|P}(\bar{p}) c_{HQ}) - (q_{I|N}(\bar{p}) c_{IF} + q_{H|N}(\bar{p}) c_{HF})$$

は非負である。よって、期待費用は $\bar{p}$ で最大化され、事前の段階での期待費用は

$$q_P(\bar{p}) (q_{I|P}(\bar{p}) c_{IQ} + q_{H|P}(\bar{p}) c_{HQ}) + q_N(\bar{p}) (q_{I|N}(\bar{p}) c_{IF} + q_{H|N}(\bar{p}) c_{HF})$$

である。他方、(40)が成立するならば、 $q_P(p)$ の係数は非負である。よって、期待費用は $\underline{p}$ で最大化され、事前の段階での期待費用は

$$q_P(\underline{p}) (q_{I|P}(\bar{p}) c_{IQ} + q_{H|P}(\underline{p}) c_{HQ}) + q_N(\underline{p}) (q_{I|N}(\underline{p}) c_{IF} + q_{H|N}(\bar{p}) c_{HF})$$

である。 ///

命題 6 の証明 まず、

$$\begin{aligned} & p q_{N|I}(c_{IF} - c_{IQ}) + (1 - p) q_{P|H}(c_{HQ} - c_{HF}) \\ &= q_{P|H}(c_{HQ} - c_{HF}) + (q_{N|I}(c_{IF} - c_{IQ}) - q_{P|H}(c_{HQ} - c_{HF})) p \end{aligned}$$

が成立するが、仮定(3)により、 $q_{N|I} > q_{P|H}$ が成立するので、 p の係数 $q_{N|I}(c_{IF} - c_{IQ}) - q_{P|H}(c_{HQ} - c_{HF})$ は正である。したがって、この事前の minimax 型期待後悔の期待値は $\bar{p}$ で達成され、その値は(42)である。 ///

命題 7 の証明 1. 事前の感染確率が p ならば、陽性反応後の条件付き（事後）非感染確率は $q_{H|P}(p)$ であるので、後悔の期待値は

$$q_{H|P}(p)(c_{HQ} - c_{HF})$$

である。 $q_{H|P}(p)$ は p の減少関数であり、 $c_{HQ} - c_{HF} > 0$ なので、 $\underline{p}$ で上記の期待値は最大化される。よって、(43)が得られる。陰性反応後の条件付き（事後）感染確率は $q_{I|N}(p)$ であるので、後悔の期待値は

$$q_{I|N}(p)(c_{IF} - c_{IQ})$$

である。 $q_{I|N}(p)$ は p の増加関数であり、 $c_{IF} - c_{IQ} > 0$ なので、 $\bar{p}$ で上記の期待値は最大化される。よって、(44)が得られる。

2. 事前の感染確率が p ならば、陽性・陰性反応後の後悔の（条件付き）期待値の期待値（平均）は

$$\begin{aligned} & q_P(p) q_{H|P}(\underline{p})(c_{HQ} - c_{HF}) + q_N(p) q_{I|N}(\bar{p})(c_{IF} - c_{IQ}), \\ &= q_{I|N}(\bar{p})(c_{IF} - c_{IQ}) + (q_{H|P}(\underline{p})(c_{HQ} - c_{HF}) - q_{I|N}(\bar{p})(c_{IF} - c_{IQ})) q_P(p) \end{aligned}$$

である。 $q_P(p)$ は p の単調増加関数なので、もし(45)が成立するならば、 $\bar{p}$ が上記の期待値を最大化し、その値は

$$\begin{aligned} & q_P(\bar{p}) q_{H|P}(\underline{p})(c_{HQ} - c_{HF}) + q_N(\bar{p}) q_{I|N}(\bar{p})(c_{IF} - c_{IQ}) \\ &= \bar{p} q_{N|I}(c_{IF} - c_{IQ}) + q_P(\bar{p}) q_{H|P}(\underline{p})(c_{HQ} - c_{HF}) \end{aligned}$$

に等しい。他方、もし、(47)が成立するならば、 $\underline{p}$ が上記の期待値を最大化し、その値は

$$\begin{aligned} & q_P(\underline{p}) q_{H|P}(\underline{p})(c_{HQ} - c_{HF}) + q_N(\underline{p}) q_{I|N}(\bar{p})(c_{IF} - c_{IQ}) \\ &= q_N(\underline{p}) q_{I|N}(\bar{p})(c_{IF} - c_{IQ}) + (1 - \underline{p}) q_{P|H}(c_{HQ} - c_{HF}) \end{aligned}$$

に等しい。 ///

「不確実性の下での良き意思決定—適切な医療とは？」に対するコメント

野村 裕***

本研究は、新型コロナウイルスの感染に係るPCR検査の結果を巡る不確実性という、現下誰もが関わりがあり関心の強い事例も取り上げながら、不可避免的に不確実性を伴うものである医療サービスの需要・供給の適切性について真正面から論じたものであり、学術的に極めて高い価値を有する研究であるとともに、医療関係者、政策関係者にとっても非常に示唆に富んだ論稿である。

冒頭に著者達は、検査に関して「陽性の検査結果を過大に評価して、不要な治療、手術を受けてしまうことが多々ある」という現状認識を示している。超高齢社会にむかうなかで、医療の質の維持、医療財政の持続可能性の確保のために、過剰な医療提供を抑制することが重要だという問題意識があることが読み取れる。

全体は、既に臨床研究の蓄積がある検査を事例とする前半と、現時点では未知的で知見の蓄積が乏しい検査を事例とする後半から構成される。

どのような検査にもあいまいさがある。検査で陽性判定が出ても病気ではない(偽陽性)ことや、検査で陰性でも病気に罹っている(偽陰性)こともある。研究会のなかで著者達から、NHK ニュースはPCR検査の陽性者数とは言わないで感染者数と報道しているが、英国BBC ニュースなどはtest positiveと表現しているという御報告があったが、事実を正しく捉えるというレベルにおいてさえ多くの課題があることを痛感する。

前半では、乳がん検診が事例として取り上げられ、事前確率の違いによって事後確率が大きく異なること、例えば何の症状もない女性が検診を受けて結果が陽性だったとしても、実際に罹患している確率はわずか0.79%であるという驚くべき分析が示されている。日本では、ある一定年齢以上になると一律に行政からがん検診の勧奨が送付されてくる。検診を受ければ放射線を被ばくすることによるデメリットもあるはずだ。検診を行う・受けることによるメリット・デメリットに関する情報がわかりやすくオープンにされて、医師と患者が正しい認識にもとづいて医療サービスに関する選択、判断することができる環境がとても重要であることが良く分かる。

後半では、新型コロナウイルスが事例として取り上げられ、感染確率が未知である場合の意思決定とその評価のフレームが提示される。感染確率が未知である場合には、感染の確率分布の集合を長方形的集合に拡張することによって、帰結主義と動学的の一貫性の両方を満たすことができることが先ず証明される。そのうえで、感染拡大防止に関する社会的費用関数として、期待される後悔(regret)の最大値を最小化する関数(minimax型期待後悔型関数)を措定し、不確実性が高い状況下での合理的な意思決定のフレームが提示される。ただし、感染の有無に関する情報が順次追加されていく状況において、選択の動学的

*** 野村 裕：内閣府経済社会総合研究所総括政策研究官。

一貫性を保証しようとする、偽陽性、偽陰性の検査結果を想定しなければならない範囲が広がるのが併せて導出されている。

今般のPCR検査については、初期には、症状や経過から感染が強く疑われると医師が判断した場合に限って指定医療機関やPCRセンターにおいて検査が実施されていたが、PCR検査数を抑制して感染者数があたかも少ないように見せかけているのではないかといった批判を招いて、徐々に検査数が増える方向に運用が緩和されていった。また同時に、精度は低いものの簡易にできる検査キットが市中に出回るようになった。つまり、乳がん検診の事例とは異なって、誰が検診を受けることが推奨されるのか自体が曖昧であり、その曖昧さ自体を巡って、批判や反批判を含めて人々が選択、行動を迫られたという経過がある。

研究会では、こうした経過のなかで生じることとなった社会的費用をどのように捉えるべきなのかといった論点についても議論が交わされた。簡単に答えの得られる論点ではないが、不確実性の下でどのようにすれば適切な意思決定を行うことができるのかという問題が、いかに日常的に直面することのある重要な問題であるかが強く認識された。

最後に、著者の一人が医療経済学の専門家として関係者と協力し、昨秋に医療提供体制崩壊の防止のための緊急提言を行っておられる点に触れたい。本研究から得られる知見の一つは、全数検査は医療提供の資源が限られている場合において望ましい選択とは言えない、ということだ。この点も含めて研究活動から得られる知見を研究フィールドにとどめずに、少しでも迅速に広く関係者へと発信、共有せんとしておられる姿勢、行動力に心より敬意を表したい。

参考文献

コロナ危機下の医療提供体制と医療機関の経営問題についての研究会「医療提供体制崩壊の防止と経済社会活動への影響最小化のための6つの提言」（2020年9月25日）