

DSGE モデルによる中長期経済分析*

～技術成長を内生化した新しい定量 DSGE モデルの意義・特徴～

寺本 和弘**

<要旨>

本論文は、中長期的な経済変動を分析するためのマクロ経済モデルとして、技術成長を内生化し、技術成長とマクロ経済変動の相互作用を明示的に組み込んだ動学的確率的一般均衡 (DSGE) モデルを提案する。従来の DSGE モデルは短期的な景気循環の分析に主眼を置き、技術成長を外生要因として取り扱っていたが、本モデルでは、技術成長を内生的に決定される変数と位置づけ、研究開発投資や人的資本の蓄積といった要因が技術進歩に与える影響を考慮している。さらに、人口動態や可変労働参加率をモデルに組み込むことで、出生率や労働参加率の変化が技術進歩に与える影響を明示的に分析可能とした点も本モデルの特徴である。本モデルに基づく分析によると、生産性ショックの種類によって経済の反応は異なり、既存技術の生産性向上は、短期的には経済成長を促進するが、技術革新の遅れを招き、長期的な成長を抑制する傾向がある。一方、研究開発の効率性が向上した場合、短期的には生産活動の減速を伴うものの、長期的には持続的な経済成長が生じる。また、人口減少は技術革新の生産性を低下させ、1人当たり GDP 成長率にも負の影響を及ぼすことが示されており、この影響を緩和するためには、高技能労働者の供給を維持するための教育投資が不可欠であり、とりわけ、人口減少の影響が顕在化する前の段階での早期対応が長期的な経済成長の維持にとって重要であることが示唆される。

JEL Classification Codes : E32, O33, O40, J11

Keywords : DSGE モデル、内生的成長、研究開発、人的資本、人口減少

* 本稿の執筆、DSGE モデルの構築、およびモデルシミュレーションに際し、新谷元嗣氏（東京大学）ならびに築村直樹氏（東京大学博士課程）から多大な支援と助言を受けた。ここに深く感謝の意を表す。また、第86回 ESRI 政策フォーラム「新しい DSGE モデルによる将来展望」（2024年10月31日）において、飯星博邦氏（日本大学）ならびに滝澤美帆氏（学習院大学）より、本稿の関連研究に関して貴重なコメントをいただいたことにも、併せて感謝の意を表す。

** 寺本 和弘：内閣府経済社会総合研究所客員研究員、一橋大学大学院経済学研究科講師。

**Endogenizing Technological Growth in DSGE Models:
A Macroeconomic Analysis of Medium- to Long-Term Cycles, Innovation, and
Demographic Dynamics**

By Kazuhiro TERAMOTO

Abstract

This paper presents a Dynamic Stochastic General Equilibrium (DSGE) model that endogenizes technological growth, providing a comprehensive framework for analyzing medium- to long-term economic fluctuations. Unlike traditional DSGE models, which primarily focus on short-term business cycles and treat technological progress as an exogenous factor, this model explicitly incorporates R&D investment, human capital accumulation, demographic changes, and labor force participation dynamics to examine their interplay with technological development. The findings reveal that different types of productivity shocks lead to distinct economic outcomes. While improvements in existing technology initially stimulate short-term growth, they divert resources away from innovation, ultimately slowing long-term economic growth. In contrast, enhanced R&D efficiency may temporarily dampen production but fosters sustained technological progress over time. Additionally, declining birth rates and an aging population reduce the productivity of innovation, negatively affecting per capita GDP growth. To counteract these adverse effects, proactive policies that support education, workforce development, and human capital investment are essential for sustaining long-term economic vitality.

JEL Classification Codes: E32, O33, O40, J11

Keywords: DSGE model, Endogenous Growth, R&D, Human Capital, Population Decline

1. はじめに

動学的確率的一般均衡 (DSGE: Dynamic Stochastic General Equilibrium) モデルは、消費者や企業の最適化行動を明示的に考慮し、それによって得られたミクロレベルの変数を、国民経済計算と整合的なかたちでマクロ経済変数へと集計することで記述されるマクロ経済モデルである。近年のマクロ経済学の景気循環分析においては、DSGE モデルに確率的な外生ショックを導入し、ショックに対するマクロ経済変数の動学的応答を解析することが標準的な手法として定着している。

また、2000 年代前半以降、定量的パフォーマンスを向上させた DSGE モデル (Smets and Wouters, 2003, 2007; Christiano, Eichenbaum and Evans, 2005) の開発が進み、時系列データを用いたパラメータ推定手法も劇的に発展した。これに伴い、中央銀行や国際機関などの政策当局においても、従来の VAR 型マクロ計量モデルと併用する形で、DSGE モデル型のマクロ計量モデルの導入が進んでいる。本稿では、政策当局で広く採用される定量 DSGE モデルの標準的特徴を概観した上で、技術成長を内生化した新しい定量 DSGE モデルの意義とその特徴について詳述する¹。

2. 標準的な定量 DSGE モデルと新しい定量 DSGE モデル

政策当局で用いられる DSGE モデル (一般に中規模 DSGE モデル、あるいは定量 DSGE モデルと称される) は、短期的な景気循環の分析を主目的としており、先進国の景気循環の特徴を適切に描写するために、消費の習慣形成、投資の調整コスト、名目摩擦 (価格および賃金の硬直性)、テイラールールに基づく金融政策、外生的な技術成長や生産性ショックなどの要素を組み込んでいる。加えて、景気変動において重要な財市場、金融市場、労働市場の特性を反映した拡張型 DSGE モデルも数多く提示されている²。さらに、モデル構造の改良に加えて、時系列データを用いたパラメータ推定手法の発展により、定量 DSGE モデルの短期的な景気循環の説明力は飛躍的に向上した³。

¹ 各国中央銀行の DSGE モデル型のマクロ計量モデルの開発状況については 笛木・福永 (2011) などを参照されたい。

² 例えば、Justiniano, Primiceri and Tambalotti (2011) は、投資財価格の低下トレンドを説明するために、消費財と投資財の異なる成長トレンドを導入し、投資財固有の生産性ショックが景気変動を説明する上で重要であることを示した。また、1990 年代の日本や 2000 年代の米国の金融危機が景気変動に与えた影響を鑑み、金融市場とマクロ経済の相互作用を組み込んだ DSGE モデルも広く研究されている。Bernanke, Gertler and Gilchrist (1999) はその先駆けであり、Iacoviello (2005)、Gertler and Kiyotaki (2010)、Gertler and Karadi (2011) や Gertler, Kiyotaki and Prestipino (2019) は、金融部門を明示的に考慮した DSGE モデルを構築した。さらに、Kaihatsu and Kurozumi (2014) は、日本のバブル崩壊後の停滞が生産性ショックによるものか、金融機関の資金供給の制約によるものかを DSGE モデルの推定を通じて検証した。労働市場に関しては、Gertler, Sala and Trigari (2008) や Christiano, Eichenbaum and Trabandt (2016) が職探しのプロセスをサーチモデルとして DSGE モデルに組み込み、失業率の変動を明示的に分析している。また、Mukoyama, Shintani and Teramoto (2021) は、フルタイムとパートタイムの二元労働市場を考慮した拡張型 DSGE モデルを提示している。

³ 定量 DSGE モデルの詳細や、ベイズ推定によるパラメータ推定の方法については 廣瀬 (2012) や Fernández-Villaverde, Rubio-Ramírez and Schorfheide (2016) を参照されたい。

しかし、既存の定量 DSGE モデルの多くは、技術成長の変化が消費、投資、労働時間、生産に与える影響を考慮する一方で、これらの要素が技術成長に与える影響については分析の対象外とされてきた。さらに、人口動態の変化も考慮されておらず、中長期的な経済変動の分析には適さないという制約があった。

こうした定量 DSGE モデルの発展と並行して、学術研究において DSGE モデルの視野を中長期分析へと拡張する試みが進められてきた。代表的な研究の一つが Comin and Gertler (2006) である。彼らは、Romer (1990) に代表される内生的成長理論に基づき、内生的技術成長をリアルビジネスサイクルモデルに組み込み、研究開発投資を通じて中長期の経済変動を説明する DSGE モデルを提示した。また、2000 年代末の金融危機後、米国経済の停滞を説明するために、Anzoategui, Comin, Gertler and Martinez (2019) は Comin and Gertler (2006) の枠組みを定量 DSGE モデルに導入し、主要なパラメータを推定した。彼らの分析によれば、2008～09 年の Great Recession における研究開発投資需要の一時的な減少が、その後の持続的な生産（供給）の低下を引き起こしたことが示されている。加えて、Ikeda and Kurozumi (2019) は同様の枠組みに金融機関の資金供給に関するショックを取り入れた DSGE モデルを用いて、金融政策の効果を分析した。さらに、Hasumi, Iiboshi and Nakamura (2018) は Ikeda and Kurozumi (2019) によって開発された DSGE モデルを日本のデータに適用し、「失われた 10 年」の日本経済を対象とした分析を行っている。この研究では、日本の経済停滞における研究開発投資の役割に焦点を当て、技術成長と景気の相互作用について新たな視点を提供している。

3. 本稿の政策分析に用いた DSGE モデル

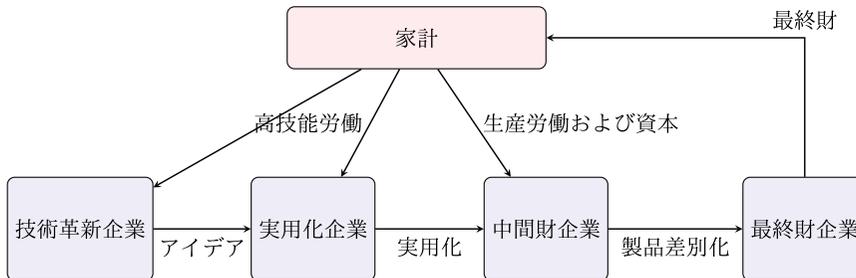
本章では、次章以降の政策分析に用いる DSGE モデルの詳細を説明する。本モデルは、Anzoategui et al. (2019) に基づき、従来の定量 DSGE モデルの枠組みを拡張し、内生的な技術成長メカニズムを導入し、中長期的な経済変動の分析を可能とする構造を有している。その上で、本モデルは、技術成長が企業の研究開発投資のみならず、教育を通じた人的資本の蓄積によっても決定される点で Anzoategui et al. (2019) のモデルとは異なる。これにより、企業の研究開発投資（需要側要因）に加え、それを支えるスキル人材の供給制約（供給側要因）も長期的な経済成長に重要な役割を果たす構造となっている。

具体的には、研究開発に従事できる労働者は高度な教育を受けた人材に限定されると仮定し、その育成には教育投資が必要であるとする。このため、持続的な成長には、企業活動のみならず、家計や政府の教育支出も不可欠である。さらに、本モデルは人口動態の変化や可変労働参加率を明示的に組み込むことで、出生率や労働参加率の変化が技術成長に与える影響を明示的に評価できるように設計されている。

また、図 1 に示すように、本モデルでは技術の創造から普及までのプロセスを「新技術の創出（技術革新）」、「技術の導入（実用化）」、「技術を活用した生産（生産活動）」の 3 段

階に分割し、それぞれの段階に関する企業の行動を明示的にモデル化している。この枠組みにより、従来の定量 DSGE モデルでは捉えられなかった、技術の伝播や普及の遅延が経済成長率に及ぼす影響を分析することができる。これにより、本モデルは、技術進歩とマクロ経済の相互作用をより現実的に捉え、政策的示唆を導出するための有用なツールとなる。

図 1：モデルにおける技術の普及プロセス



3.1 DSGE モデルの詳細

以下では、最終財を基準財とみなし、最終財価格を $p_t = 1$ と基準化する。

家計 本モデルでは、測度 1 の同質的な家計（代表的家計）を想定し、各期 t において生産可能人口 $N_t > 0$ の構成員が存在するとする。生産可能人口の規模は外生的に決定されるが、時間とともに変動する可能性を考慮する。各期において、生産可能人口の一部が確率 $\delta_N \in (0, 1)$ で引退し、新たに $N_t b_{N,t}$ の新規構成員が加わるため、生産可能人口の成長率は次式で表される。

$$\frac{N_{t+1}}{N_t} - 1 = b_{N,t} - \delta_N.$$

各家計構成員は、研究開発職（技術革新企業または実用化企業）、生産活動職（中間財生産企業）、または家事生産に従事する。 $L_{s,t}$ 、 $L_{u,t}$ 、 $L_{h,t}$ はそれぞれ、研究開発職、生産活動職、家事生産に従事する構成員の総数を表し、以下の労働供給制約を満たす。

$$L_{s,t} + L_{u,t} + L_{h,t} = N_t.$$

研究開発職に従事可能な高技能労働者の総数は、次式で遷移する。

$$L_{s,t+1} = (1 - \delta_N)L_{s,t} + P_{s,t}N_t b_{N,t},$$

ここで、 $P_{s,t}$ は新規に生産可能人口に加わる者が高技能労働者である確率を表し、この確率は家計の教育支出 E_t に依存する。また、非高技能労働者が生産可能年齢になった

後に高技能労働者へ転換するリスクリングは考慮しない。

研究開発職と生産活動職の賃金をそれぞれ $w_{s,t}$ 、 $w_{u,t}$ とし、家計の総労働所得 W_t は $W_t = w_{s,t}L_{s,t} + w_{u,t}L_{u,t}$ で与えられる。家計の世帯主は、1人当たりの最終消費 $C_{m,t}$ 、家事生産財消費 $C_{h,t}$ 、教育支出 $E_t N_{t,t}$ 、投資 I_t 、物的資本の水準 K_{t+1} 、安全債券の保有量 B_{t+1} 、および資本稼働率 U_t を決定する。

家計の効用は、最終財と家庭生産財の CES（定数代替弾力性）集約に基づく複合消費

$$C_t = \left[\xi C_{m,t}^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} + (1-\xi) C_{h,t}^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} \right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}},$$

によって決定される。ここで、 $\xi \in (0, 1)$ は CES 集約の重みパラメータ、 $\epsilon > 0$ は 2 財間の代替の弾力性を表す。家計の生涯効用は次式で与えられる。

$$\mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t N_t \log(C_t - hC_{t-1}) \right],$$

ここで、 \mathbb{E}_t は t 期に利用可能な情報に基づく条件付き期待値を表すオペレーターであり、 $\beta \in (0, 1)$ は主観的割引率、 $h \in (0, 1]$ は消費の習慣形成の程度を表す。

家計の予算制約は次式で与えられる。

$$C_{m,t} + (1 - \tau_e) E_t b_{N,t} + I_t + \frac{1}{r_t} B_{t+1} = \frac{W_t}{N_t} + \Pi_t + r_{kt} U_t \frac{N_{t-1}}{N_t} K_t + \frac{N_{t-1}}{N_t} B_t + T_t.$$

ここで、 $\tau_e \in [0, 1)$ は教育費用に対する政府補助率、 r_t は安全利子率、 Π_t は（構成員 1 人当たりの）独占競争企業の利益、 r_{kt} は資本のレンタル価格、 T_t は（構成員 1 人当たりの）一括課税を表す。

家庭生産財の生産量は次式で決定される。

$$C_{h,t} = \varsigma \bar{K}_t L_{h,t},$$

ここで、 $\varsigma > 0$ は生産性パラメータ、 \bar{K}_t は t 期において 1 人当たり利用可能な物的資本の量を表す。

物的資本ストックの遷移は次式で与えられる。

$$N_t K_{t+1} = (1 - \delta(U_t)) N_{t-1} K_t + \left(1 - f \left(\frac{I_t}{\Gamma_{t-1} I_{t-1}} \right) \right) N_t I_t,$$

ここで、 $\delta(x) = \delta + d_{1,t} \mu_d [\exp((x-1)/\mu_d) - 1]$ は資本減耗率を表し、定常状態において $\delta(1) = \delta \in (0, 1)$ 、 $\delta'(1) = d_{1,t} \in (0, 1)$ 、 $\delta'(1)/\delta''(1) = \mu_d$ を満たす。また、 $f(x) = (x-1)^2/(2\zeta)$ は投資調整費用を表し、 $f(1) = f'(1) = 0$ 、 $f''(1) = 1/\zeta > 0$ である。 Γ_t は財のトレンド変数の成長率を示す。

教育費 E_t は、新規参入者が高技能労働者である確率 $P_{s,t}$ に非線形な形で依存し、かつ生産労働者の賃金 $w_{u,t}$ に比例すると仮定する。すなわち、

$$E_t = E(P_{s,t})w_{u,t} = \frac{a_e}{\eta} \left[\left(\frac{1 - \bar{L}_{s,t}/N_t}{1 - P_{s,t}} \right)^\eta - 1 \right] w_{u,t}, \quad (1)$$

ここで、 a_e および η は正の定数である。 $\bar{L}_{s,t}$ は経済全体の高技能労働者の総数であり、各家計にとっては所与であり、経済全体の高技能労働者の割合が増加すると、教育の効率性が向上する正の外部効果があると仮定する。重要な点として、定常状態では $\bar{L}_{s,t}/N_t$ の値は $P_{s,t}$ と等しくなるため、(1) から $E(\bar{P}_s) = 0$ かつ $E(1) = \infty$ となる。また、 $E'(P_s) > 0$ かつ $E''(P_s) > 0$ が $P_s \in [0, 1]$ の範囲で成り立つ。

以下では、家計の最適化問題を概説する。家計の最終財消費からの限界効用 $u_{m,t}$ は次式で与えられる。

$$u_{m,t} = \xi \left(\frac{C_t}{C_{m,t}} \right)^{\frac{1}{\epsilon}} \left[\frac{N_t}{C_t - hC_{t-1}} - \beta \mathbb{E}_t \frac{hN_{t+1}}{C_{t+1} - hC_t} \right].$$

安全債券保有に関する最適性条件（オイラー方程式）は次の通りである。

$$1 = r_t \mathbb{E}_t \Lambda_{t,t+1},$$

ここで、 $\Lambda_{t,t+1} \equiv \beta \frac{u_{m,t+1}}{u_{m,t}}$ は確率的割引因子を表す。投資、資本稼働率、物的資本水準の最適性条件は次のように与えられる。

$$1 = Q_t \left\{ 1 - f \left(\frac{I_t}{\Gamma_{t-1} I_{t-1}} \right) - f' \left(\frac{I_t}{\Gamma_{t-1} I_{t-1}} \right) \frac{I_t}{\Gamma_{t-1} I_{t-1}} \right\} \\ + \mathbb{E}_t \Lambda_{t,t+1} \left[Q_{t+1} f' \left(\frac{I_{t+1}}{\Gamma_t I_t} \right) \left(\frac{I_{t+1}}{\Gamma_t I_t} \right)^2 \Gamma_t \frac{N_{t+1}}{N_t} \right],$$

$$r_{kt} = Q_t \delta' (U_t),$$

$$Q_t = \mathbb{E}_t [\Lambda_{t,t+1} (D_{t+1} + Q_{t+1})],$$

ここで、 $D_t = r_{kt} U_t - \delta(U_t) Q_t$ である。

家事生産労働の最適性条件は次の通り。

$$s \bar{K}_{t-1} \frac{1 - \xi}{\xi} \left(\frac{C_{h,t}}{C_{m,t}} \right)^{-\frac{1}{\epsilon}} = w_{u,t}.$$

教育支出の最適性条件は次のように与えられる。

$$(1 - \tau_e) E'(P_{s,t}) = \mathbb{E}_t \left[\Lambda_{t,t+1} \frac{w_{u,t+1}}{w_{u,t}} \left(\frac{w_{s,t+1}}{w_{u,t+1}} - 1 + (1 - \tau_e) (1 - \delta_N) E'(P_{s,t+1}) \right) \right].$$

最終財企業 測度 1 の同質的な最終財企業が存在し、完全競争市場の下で最終財を生産する。各企業は、差別化された中間財を以下の CES 関数で集約し、最終財の生産を行う。

$$Y_t = \left(\int_0^{A_t} (Y_{m,t}^j)^{\frac{1}{\vartheta}} dj \right)^{\vartheta}, \quad (2)$$

ここで、 A_t は t 期に生産される中間財の種類数、 $Y_{m,t}^j$ は種類 $j \in [0, A_t]$ の中間財の投入量、 $\vartheta > 1$ は代替の弾力性を表すパラメータである。

種類 $j \in [0, A_t]$ の中間財の価格を $P_{m,t}^j$ とする。最終財企業はこれらの価格を所与とし、費用最小化問題を解くことで、中間財 j に対する需要関数

$$Y_{m,t}^j = \left(\frac{P_{m,t}^j}{p_t} \right)^{-\frac{\vartheta}{\vartheta-1}} Y_t. \quad (3)$$

が導出される。費用最小化問題の結果から、最終財の価格指数は次式で与えられる。

$$1 = p_t = \left(\int_0^{A_t} (P_{m,t}^j)^{-\frac{1}{\vartheta-1}} dj \right)^{-(\vartheta-1)}. \quad (4)$$

本論文で分析する対称均衡、すなわち全ての j に対して $P_{m,t}^j = p_{m,t}$ が成立する場合、(4) より次の関係が導かれる。

$$1 = \frac{p_{m,t}}{A_t^{\vartheta-1}}.$$

中間財企業 各中間財企業は、実用化企業によって開発された1つの実用化技術（ビジネスモデル）を活用し、製品差別化を行ったうえで、独占的競争市場の下で最終財企業に販売する。その結果、各期における中間財企業の数、その期に存在するビジネスモデルの数と等しく、 t 期におけるその数は A_t となる。

各中間財企業 $j \in [0, A_t]$ は、稼働資本 $U_t K_t^j$ 、生産労働 $L_{u,t}^j$ 、輸入財 M_t^j を投入し、以下のコブ・ダグラス生産関数に基づいて生産を行う。

$$Y_{m,t}^j = \theta_t \left[(U_t K_t^j)^\alpha (L_{u,t}^j)^{1-\alpha} \right]^\nu (M_t^j)^{1-\nu},$$

ここで、生産性ショック θ_t は次の確率過程に従う。

$$\log(\theta_t) = (1 - \rho_\theta) \log(\theta) + \rho_\theta \log(\theta_{t-1}) + \sigma_\theta \varepsilon_{\theta,t}; \quad \varepsilon_{\theta,t} \sim N(0, 1).$$

ここでは、 $\theta = \mathbb{E}[\theta_t] = 1$ 、 $|\rho_\theta| < 1$ 、 $\sigma_\theta > 0$ を仮定する。また、輸入財の価格 $P_{M,t}$ は次の確率過程に従う。

$$\log(P_{M,t}) = \rho_{PM} \log P_{M,t-1} + \sigma_{PM} \varepsilon_{PM,t}; \quad \varepsilon_{PM,t} \sim N(0, 1).$$

ここでは、 $|\rho_{PM}| < 1$ 、 $\sigma_{PM} > 0$ を仮定する。

中間財の限界費用を $mc_{m,t}$ とすると、費用最小化問題を解くことで、以下の条件が得られる。

$$\begin{aligned} mc_{m,t} (1 - \alpha) \nu \frac{Y_{m,t}^j}{L_{u,t}^j} &= w_{u,t}, \\ mc_{m,t} \alpha \nu \frac{Y_{m,t}^j}{U_t K_{t-1}^j} &= r_{kt}, \\ mc_{m,t} (1 - \nu) \frac{Y_{m,t}^j}{M_t^j} &= P_{M,t}. \end{aligned}$$

中間財企業の利潤は、実質価格 $p_{m,t}^j$ を用いて次のように表される。

$$\Pi_{m,t}^j = (p_{m,t}^j - mc_{m,t})Y_{m,t}^j$$

需要関数(3)を考慮すると、各中間財企業は独占的競争のもとで利潤最大化を行い、最適価格として

$$p_{m,t} = \vartheta mc_{m,t}$$

を設定する。したがって、企業 j の利潤は

$$\Pi_{m,t}^j = \left(1 - \frac{1}{\vartheta}\right) p_{m,t} Y_{m,t}^j = \left(1 - \frac{1}{\vartheta}\right) A_t^{\vartheta-1} Y_{m,t}^j$$

となる。

対称均衡、すなわちすべての中間財企業において $Y_{m,t}^j = Y_{m,t}$ が成り立つ場合、最終財企業の生産関数 (2) から

$$Y_t = (A_t)^{\vartheta} Y_{m,t}$$

が導かれる。したがって、対称均衡における企業の利潤は

$$\Pi_{m,t}^j = \left(1 - \frac{1}{\vartheta}\right) A_t^{-1} Y_t \equiv \Pi_{m,t} \quad (5)$$

となり、すべての中間財企業が同じ利潤を得る。

技術革新企業 本モデルでは、測度 1 の無数の技術革新企業が存在し、各企業は研究開発に従事する高技能労働者を雇用し、新技術（アイデア）の開発を行う。開発されたアイデアは完全競争市場において実用化企業に販売される。技術革新企業 i が雇用する高技能労働者の数を $L_{sr,t}^i$ とし、労働者 1 人当たりが生み出すことのできる新技術の開発数（すなわち研究開発の生産性） φ_t と定義する。 φ_t はすべての技術革新企業で一定と仮定し、次の式で与えられる。

$$\varphi_t = \chi_t Z_t (L_{sr,t})^{\rho_z - 1}; \quad L_{sr,t} = \int_0^1 L_{sr,t}^i di, \quad (6)$$

ここで、 χ_t は研究開発の生産性に関する外生的変動要因であり、次の確率過程に従う。

$$\log(\chi_t) = (1 - \rho_\chi) \log(\bar{\chi}) + \rho_\chi \log(\chi_{t-1}) + \sigma_\chi \epsilon_{\chi,t}; \quad \epsilon_{\chi,t} \sim N(0, 1),$$

ここで、 $\bar{\chi} > 0$ 、 $|\rho_\chi| < 1$ 、 $\sigma_\chi > 0$ を仮定する。また、 $Z_t > 0$ は t 期の初めに存在する既存の技術ストックの大きさを表し、技術ストックの増加が研究開発の生産性を向上させる（「shoulders-of-giants 効果」）。 $L_{sr,t}$ は研究開発に従事する労働者の社会全体の総量を示し、個々の企業にとって所与のものとし、 $\rho_z < 1$ を仮定することで、外部の研究開発活動の増加によって自社の研究開発効率が低下する「混雑外部性（congestion externality）」を考慮する。

既存の技術は、每期確率 $1 - \phi \in (0, 1)$ で陳腐化し、技術ストックの進化は次式で表される。

$$Z_{t+1} = \varphi_t L_{sr,t} + \phi Z_t. \quad (7)$$

(7) と (6) を組み合わせると、技術成長率は

$$\frac{Z_{t+1}}{Z_t} = \chi_t (L_{sr,t})^{\rho_z} + \phi.$$

となる。この式から、 ρ_z は研究開発に対する技術成長率の弾力性を表すこととなる。

技術革新企業の労働雇用は、次の利潤最大化問題により決定される。

$$\max_{\tilde{L}_{sr,t}} \mathbb{E}_t \left\{ \Lambda_{t,t+1} J_{t+1} \varphi_t \tilde{L}_{sr,t} \right\} - (1 - \tau_{sr,t}) w_{s,t} \tilde{L}_{sr,t},$$

ここで、 J_t は技術（アイデア）の販売価格、 $\tau_{sr,t}$ は技術革新企業の賃金支払いに対する政府補助率であり、次の確率過程に従う。

$$\log(\tau_{sr,t}) = (1 - \rho_{sr}) \log(\bar{\tau}_{sr}) + \rho_{sr} \log(\tau_{sr,t-1}) + \sigma_{sr} \varepsilon_{sr,t}; \quad \varepsilon_{sr,t} \sim N(0, 1),$$

ここで、 $\bar{\tau}_{sr} \in (0, 1)$ 、 $|\rho_{sr}| < 1$ 、 $\sigma_{sr} > 0$ である。最適性条件は次のように与えられる。

$$\mathbb{E}_t \{ \Lambda_{t,t+1} J_{t+1} \varphi_t \} = (1 - \tau_{sr,t}) w_{s,t}.$$

実用化企業 本モデルにおいて、実用化企業は技術革新企業が生み出した技術（アイデア）を実用化する役割を担う。具体的には、実用化企業は完全競争市場において高技能労働者を雇用し、技術革新企業から購入した未実用化の技術（アイデア）を、生産に利用可能な技術（ビジネスモデル）へと変換する。この過程で、実用化企業の高技能労働者の雇用は技術革新企業と競合するため、労働市場において高技能労働者が不足すると、技術の実用化に時間がかかるようになる。

各実用化企業は、技術革新企業から未実用技術の利用権を価格 J_t で購入し、高技能労働者を投入することで技術の実用化を進める。実用化確率 λ_t は次式で与えられる。

$$\lambda_t = \lambda (Z_t L_{sa,t}) \equiv \kappa_\lambda (Z_t L_{sa,t})^{\rho_\lambda}. \quad (8)$$

ここで、 $L_{sa,t}$ は実用化企業の労働投入量とし、 λ_t は $L_{sa,t}$ に対して単調増加かつ凹関数であると仮定する⁴。したがって、実用化された技術ストックの大きさは次の式に従う。

$$A_{t+1} = \lambda_t \phi [Z_t - A_t] + \phi A_t.$$

実用化企業は、未実用技術の価値 J_t を最大化するために労働投入量 $L_{sa,t}$ を選択する。

⁴ (8)における関数形の仮定は、技術ストック Z_t からの波及効果を考慮している。技術水準が向上すると、実用化プロセスが効率化されることを想定している。この波及効果の仮定は、均衡成長経路の維持にも寄与する。

すなわち、次の最適化問題を解く。

$$J_t = \max_{L_{sa,t}} \mathbb{E}_t \{ -(1 - \tau_{sa,t}) w_{s,t} L_{sa,t} + \phi \Lambda_{t,t+1} [\lambda (Z_t L_{sa,t}) V_{t+1} + (1 - \lambda (Z_t L_{sa,t})) J_{t+1}] \}.$$

また、実用化企業の賃金補助率 $\tau_{sa,t}$ は次の確率過程に従う。

$$\log(\tau_{sa,t}) = (1 - \rho_{sa}) \log(\bar{\tau}_{sa}) + \rho_{sa} \log(\tau_{sa,t-1}) + \sigma_{sa} \varepsilon_{sa,t}, \quad \varepsilon_{sa,t} \sim N(0, 1),$$

ここで、 $\bar{\tau}_{sa} \in (0, 1)$ 、 $|\rho_{sa}| < 1$ 、 $\sigma_{sa} > 0$ である。

実用化された技術の資産価格 V_t は、財生産による利潤 $\Pi_{m,t}$ の現在割引価値として

$$V_t = \Pi_{m,t} + \phi \mathbb{E}_t [\Lambda_{t,t+1} V_{t+1}]. \quad (9)$$

が成り立つ。便宜上、 $V_t^A \equiv V_t A_t$ を定義し、(5) を (9) に代入すると、

$$V_t^A = (1 - \tau_{\pi t}) \left(\frac{\vartheta - 1}{\vartheta} \right) Y_t + \phi \mathbb{E}_t \left[\Lambda_{t,t+1} V_{t+1}^A \frac{A_t}{A_t} \right].$$

が得られる。労働投入 $L_{sa,t}$ に関する一階条件は次のようになる。

$$Z_t \lambda' (Z_t L_{sa,t}) \cdot \phi \mathbb{E}_t [\Lambda_{t,t+1} (V_{t+1} - J_{t+1})] = (1 - \tau_{sa,t}) w_{s,t}.$$

政府 政府は均衡予算を維持する：

$$G_t + \tau_e E_t b_{N,t} N_t + \tau_{sr,t} w_{s,t} L_{sr,t} + \tau_{sa,t} w_{s,t} L_{sa,t} = N_t T_t.$$

ここで、 G_t は政府の最終消費を表す。 G_t は次の外生的過程に従う：

$$G_t = Y_t g_t$$

ただし、

$$\log(g_t) = (1 - \rho_g) \log(g) + \rho_g \log(g_{t-1}) + \sigma_g \varepsilon_{g,t}; \quad \varepsilon_{g,t} \sim N(0, 1)$$

ここで、 $g \in (0, 1)$ 、 $|\rho_g| < 1$ 、 $\sigma_g > 0$ である。

市場均衡条件 最終財市場の均衡条件は次のように与えられる。

$$Y_t = N_t C_{m,t} + N_t I_t + E_t b_{N,t} N_t + G_t + P_{M,t} M_t.$$

高技能労働者の労働市場の均衡条件は次の通りである。

$$L_{s,t} = [Z_t - A_t] L_{sa,t} + L_{sr,t}.$$

4. 本モデルの示唆

第3節で提示したモデルから多くの示唆が得られるが、ここでは特に重要な2点について述べる。

4.1 生産性ショックの影響

本モデルの分析から得られる重要な示唆の一つは、生産性ショックに対する経済の反応がショックの種類によって異なる点である。具体的には、中間財の生産性ショック θ_t と技術開発研究の効率性ショック χ_t に対する経済の動的な反応メカニズムは大きく異なる。まず、 θ_t が上昇すると、経済主体は短期的な生産性向上を活用するために、技術革新のための研究開発リソースを削減し、その分のリソースを実用化のための研究開発や生産労働へと振り向ける。この戦略は、新技術の実用化には時間を要するため、短期的に既存技術の実用化を加速させることで、生産性向上の恩恵を即座に享受しようとするものである。その結果、短期的には技術の実用化が促進され、生産量が増加し、経済成長率は上昇する。しかし、やがて実用化可能な技術ストックが枯渇し、長期的には成長率の低下につながる。

一方、技術開発研究の効率性ショック χ_t が上昇した場合、経済主体はまず技術革新のための研究開発リソースを増加させ、その後、徐々に実用化のための研究開発や生産活動へとリソースをシフトする傾向が見られる。この過程において、当初は技術革新のための研究開発を優先するため、実用化のリソースが削減され、一時的に実用化の停滞と生産の縮小が生じる。しかし、時間の経過とともに新技術の実用化が進展し、長期的には持続的な成長率の上昇につながる。

以上の結果から、本モデルは、財の生産プロセスの上流（技術開発）に対するショック (χ_t) と下流（生産活動）に対するショック (θ_t) が、異なる反応パターンを引き起こすことを示唆している。政策的観点からは、生産性ショックの種類を明確に区別し、それぞれに適した政策対応を講じることが、経済成長の安定的な維持に不可欠である。

4.2 人口減少と技術成長の関係

本モデルの分析から得られるもう一つの重要な示唆は、出生率の低下が長期的な経済成長に及ぼす影響である。具体的には、出生数 $N_{n,t} = N_t b_{N,t}$ の持続的な減少が将来の総人口の減少につながり、それが GDP 成長率のみならず、1人当たり GDP 成長率の低下をもたらすことが示される。このメカニズムの核心には、技術開発における人口規模効果が存在する。すなわち、総人口の減少は技術革新の生産性を低下させ、その影響の大きさは規模効果を制御するパラメータ ρ_z に依存する⁵。

人口減少の影響が予見される場合、経済主体は規模効果を享受するために、技術革新研究開発や技術の実用化を前倒しで進めるインセンティブを持つ。このため、初期段階では

⁵ 経済成長における人口規模効果に関しては Jones (1999, 2022a, 2022b) を参照されたい。

成長率への影響は限定的であるが、20～30 年が経過すると規模効果の減少および前倒し投資の影響が消失し、成長率の深刻な低下が生じる。この分析は、短期的な政策対応のみならず、長期的な視点からの戦略的な政策介入の必要性を示唆する。

この問題に対応するための政策的含意として、技術革新研究開発を行う企業への支援に加え、技術開発を担う人材の供給を維持するための教育投資支援が不可欠である。特に、高技能労働者の供給を促進するための教育費の補助や人的資本の蓄積を促す政策が、人口減少の負の影響を緩和する手段となる。しかし、これらの政策は、人口減少による規模効果の低下が顕在化してから実施しても効果が限定的であるため、長期的な成長維持のためには、早期の実施が求められる。

以上の分析は、人口動態が技術進歩および経済成長に与える影響を考慮した政策設計の重要性を示している。従来のマクロ経済モデルでは、人口の増減が単純に GDP 規模に比例するものと仮定されることが多いが、本モデルは、人口減少が技術革新を抑制し、結果として 1 人当たり GDP の成長率にも負の影響を及ぼすことを明示的に示している。この点は、少子高齢化が進行する日本において、特に重要な政策課題となる。

参考文献

- 廣瀬康生 (2012), 『DSGE モデルによるマクロ実証分析の方法』三菱経済研究所。
- 笛木琢治・福永一郎 (2011), 「Medium-Scale Japanese Economic Model (M-JEM) : 中規模動学的一般均衡モデルの開発状況と活用例」, 日本銀行ワーキングペーパーシリーズ, No. 11-J-8.
- Anzoategui, Diego, Diego Comin, Mark Gertler, and Joseba Martinez (2019). “Endogenous Technology Adoption and R&D as Sources of Business Cycle Persistence.” *American Economic Journal: Macroeconomics*, 11(3), 67-110.
- Bernanke, Ben S., Mark Gertler, and Simon Gilchrist (1999). “The Financial Accelerator in a Quantitative Business Cycle Framework.” In *Handbook of Macroeconomics*, Vol. 1, edited by Taylor, John B. and Michael Woodford. Elsevier, Amsterdam, 1341-1393.
- Christiano, Lawrence J., Martin Eichenbaum, and Charles L. Evans (2005). “Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy.” *Journal of Political Economy*, 113(1), 1-45.
- Christiano, Lawrence J., Martin S. Eichenbaum, and Mathias Trabandt (2016). “Unemployment and Business Cycles,” *Econometrica*, 84(4), 1523-1569.
- Comin, Diego and Mark Gertler (2006). “Medium-Term Business Cycles.” *American Economic Review*, 96(3), 523-551.
- Fernández-Villaverde, J., J.F. Rubio-Ramírez, and F. Schorfheide (2016). “Solution and Estimation Methods for DSGE Models.” In *Handbook of Macroeconomics*, Vol. 2, edited by Taylor, John

- B. and Harald Uhlig. Elsevier, Amsterdam, 527-724.
- Gertler, Mark and Peter Karadi (2011). “A Model of Unconventional Monetary Policy.” *Journal of Monetary Economics*, 58(1), 17-34.
- Gertler, Mark and Nobuhiro Kiyotaki (2010). “Financial Intermediation and Credit Policy in Business Cycle Analysis.” In *Handbook of Monetary Economics*, Vol. 3, edited by Friedman, Benjamin M. and Michael Woodford. Elsevier, Amsterdam, 547-599.
- Gertler, Mark, Luca Sala, and Antonella Trigari (2008). “An Estimated Monetary DSGE Model with Unemployment and Staggered Nominal Wage Bargaining.” *Journal of Money, Credit and Banking*, 40(8), 1713-1764.
- Gertler, Mark, Nobuhiro Kiyotaki, and Andrea Prestipino (2019). “A Macroeconomic Model with Financial Panics.” *Review of Economic Studies*, 87(1), 240-288, 05.
- Hasumi, Ryo, Hirokuni Iiboshi, and Daisuke Nakamura (2018). “Trends, Cycles and Lost Decades: Decomposition from a DSGE Model with Endogenous Growth.” *Japan and the World Economy*, 46, 9-28.
- Iacoviello, Matteo (2005). “House Prices, Borrowing Constraints, and Monetary Policy in the Business Cycle.” *American Economic Review*, 95(3), 739-764.
- Ikedo, Daisuke and Takushi Kurozumi (2019). “Slow Post-Financial Crisis Recovery and Monetary Policy.” *American Economic Journal: Macroeconomics*, 11(4), 82-112.
- Jones, Charles I. (1999). “Growth: With or Without Scale Effects?” *American Economic Review*, 89(2), 139-144.
- (2022a). “The Past and Future of Economic Growth: A Semi-Endogenous Perspective.” *Annual Review of Economics*, 14, 125-152.
- (2022b). “The End of Economic Growth? Unintended Consequences of a Declining Population.” *American Economic Review*, 112(11), 3489-3527.
- Justiniano, Alejandro, Giorgio E. Primiceri, and Andrea Tambalotti (2011). “Investment Shocks and the Relative Price of Investment.” *Review of Economic Dynamics*, 14(1), 102-121.
- Kaihatsu, Sohei and Takushi Kurozumi (2014). “Sources of Business Fluctuations: Financial or Technology Shocks?” *Review of Economic Dynamics*, 17(2), 224-242.
- Mukoyama, Toshihiko, Mototsugu Shintani, and Kazuhiro Teramoto (2021). “Cyclical PartTime Employment in an Estimated New Keynesian Model with Search Frictions.” *Journal of Money, Credit, and Banking*, 53(8), 1929-1968.
- Romer, Paul M. (1990). “Endogenous Technological Change.” *Journal of Political Economy*, 98(5), 71-102.
- Smets, Frank and Rafael Wouters (2003). “An Estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium Model of the Euro Area.” *Journal of the European Economic Association*, 1(5), 1123-1175.

—— (2007). “Shocks and Frictions in US Business Cycles: A Bayesian DSGE Approach.” *American Economic Review*, 97(3), 586-606.

Appendices

付録 A 定常化前の均衡式一覧

以下の付録においては、DSGE モデルを実装するソフトウェアである *dynare* の表記法に合わせて、 t 期における状態変数を $t-1$ 期の時間表記によって記述する。

$$L_{s,t-1} + L_{u,t} + L_{h,t} = N_t$$

$$L_{s,t} = (1 - \delta_N)L_{s,t-1} + b_{N,t}N_tP_{s,t}$$

$$\varsigma K_{t-1} = \frac{\xi}{1 - \xi} \left(\frac{C_{h,t}}{C_{m,t}} \right)^{\frac{1}{\epsilon}} w_{u,t}$$

$$N_t C_{h,t} = \varsigma K_{t-1} L_{h,t}$$

$$(1 - \tau_e)E'(P_{s,t}) = \mathbb{E}_t \left[\Lambda_{t,t+1} \frac{w_{u,t+1}}{w_{u,t}} \left(\left(\frac{w_{s,t+1}}{w_{u,t+1}} - 1 \right) + (1 - \tau_e)(1 - \delta_N)E'(P_{s,t+1}) \right) \right]$$

$$E'(P_{s,t}) = \frac{a_e}{1 - P_{s,t}} \left(\frac{1 - L_{s,t-1}/N_t}{1 - P_{s,t}} \right)^\eta$$

$$\Lambda_{t,t+1} = \beta \frac{\mathcal{U}_{m,t+1}}{\mathcal{U}_{m,t}}$$

$$\mathcal{U}_{m,t} = \xi \left(\frac{C_t}{C_{m,t}} \right)^{\frac{1}{\epsilon}} \left[\frac{N_t}{C_t - hC_{t-1}} - \beta \mathbb{E}_t \frac{hN_{t+1}}{C_{t+1} - hC_t} \right]$$

$$C_t = \left[\xi C_{m,t}^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} + (1 - \xi) C_{h,t}^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} \right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}$$

$$1 = r_t \mathbb{E}_t \Lambda_{t,t+1}$$

$$N_t K_t = (1 - \delta(U_t)) N_{t-1} K_{t-1} + \left(1 - f \left(\frac{I_t}{\Gamma_{t-1} I_{t-1}} \right) \right) N_t I_t$$

$$Q_t = \mathbb{E}_t [\Lambda_{t,t+1} (r_{k,t+1} U_{t+1} + Q_{t+1} (1 - \delta(U_{t+1})))]$$

$$r_{k,t} = Q_t \delta'(U_t)$$

$$1 = Q_t \left\{ 1 - f \left(\frac{I_t}{\Gamma_{t-1} I_{t-1}} \right) - f' \left(\frac{I_t}{\Gamma_{t-1} I_{t-1}} \right) \frac{I_t}{\Gamma_{t-1} I_{t-1}} \right\} \\ + \mathbb{E}_t \Lambda_{t,t+1} \left[Q_{t+1} f' \left(\frac{I_{t+1}}{\Gamma_t I_t} \right) \left(\frac{I_{t+1}}{\Gamma_t I_t} \right)^2 \frac{N_{t+1}}{N_t} \right]$$

$$Y_t = (A_{t-1})^{\vartheta-1} \theta_t [(U_t N_{t-1} K_{t-1})^\alpha (L_{u,t})^{1-\alpha}]^\nu M_t^{1-\nu}$$

$$Y_t = A_{t-1}^\vartheta Y_{m,t}^j \text{ for all } j$$

$$1 = \frac{p_{m,t}}{A_{t-1}^{\vartheta-1}}$$

$$p_{m,t} = \vartheta m c_{m,t}$$

$$m c_{m,t} (1 - \alpha) \nu \frac{Y_{m,t}^j}{L_{u,t}^j} = w_{u,t} \text{ for all } j$$

$$m c_{m,t} \alpha \nu \frac{Y_{m,t}^j}{U_t K_{t-1}^j} = r_{k,t} \text{ for all } j$$

$$m c_{m,t} (1 - \nu) \frac{Y_{m,t}^j}{M_t^j} = P_{M,t} \text{ for all } j$$

$$\frac{A_t}{A_{t-1}} = \lambda_t \phi \left[\frac{Z_{t-1}}{A_{t-1}} - 1 \right] + \phi$$

$$\lambda_t = \kappa_\lambda (Z_{t-1} L_{sa,t})^{\rho_\lambda}$$

$$J_t^Z \equiv Z_{t-1} J_t$$

$$V_t^A \equiv A_{t-1} V_t$$

$$L_{sa,t}^Z \equiv Z_{t-1} L_{sa,t}$$

$$\rho_\lambda \lambda_t \phi \mathbb{E}_t \left[\Lambda_{t,t+1} \left(V_{t+1}^A \frac{Z_{t-1}}{A_t} - J_{t+1}^Z \frac{Z_{t-1}}{Z_t} \right) \right] = (1 - \tau_{sa,t}) w_{s,t} L_{sa,t}^Z$$

$$\frac{Z_t}{Z_{t-1}} = \chi_t (L_{sr,t})^{\rho_z} + \phi$$

$$\mathbb{E}_t \left[\Lambda_{t,t+1} J_{t+1}^Z \chi_t \frac{Z_{t-1}}{Z_t} L_{sr,t}^{\rho_z-1} \right] = (1 - \tau_{sr,t}) w_{s,t}$$

$$J_t^Z = -(1 - \tau_{sa,t}) w_{s,t} L_{sa,t}^Z + \phi \mathbb{E}_t \left[\Lambda_{t,t+1} \left(\lambda_t V_{t+1}^A \frac{Z_{t-1}}{A_t} + (1 - \lambda_t) J_{t+1}^Z \frac{Z_{t-1}}{Z_t} \right) \right]$$

$$V_t^A = (1 - \tau_\pi) \left(\frac{\vartheta - 1}{\vartheta} \right) Y_t + \phi \mathbb{E}_t \left[\Lambda_{t,t+1} V_{t+1}^A \frac{A_{t-1}}{A_t} \right]$$

$$L_{s,t-1} = \left(1 - \frac{A_{t-1}}{Z_{t-1}} \right) L_{sa,t}^Z + L_{sr,t}$$

$$Y_t = N_t C_{m,t} + \frac{a_e}{\eta} \left[\left(\frac{1 - L_{s,t-1}/N_t}{1 - P_{s,t}} \right)^\eta - 1 \right] w_{u,t} \times b_{N,t} N_t + N_t I_t + G_t,$$

$$G_t = Y_t g_t$$

$$\log(\theta_t) = (1 - \rho_\theta) \log(\theta) + \rho_\theta \log(\theta_{t-1}) + \sigma_\theta \varepsilon_{\theta,t}$$

$$\begin{aligned}
\log(\chi_t) &= (1 - \rho_\chi) \log(\chi) + \rho_\chi \log(\chi_{t-1}) + \sigma_\chi \varepsilon_{\chi,t} \\
\log(g_t) &= (1 - \rho_g) \log(g) + \rho_g \log(g_{t-1}) + \sigma_g \varepsilon_{g,t} \\
\log(P_{M,t}) &= \rho_{PM} \log(P_{M,t-1}) + \sigma_{PM} \varepsilon_{PM,t} \\
\log(\tau_{sr,t}) &= (1 - \rho_{sr}) \log(\bar{\tau}_{sr}) + \rho_{sr} \log(\tau_{sr,t-1}) + \sigma_{sr} \varepsilon_{sr,t} \\
\log(\tau_{sa,t}) &= (1 - \rho_{sa}) \log(\bar{\tau}_{sa}) + \rho_{sa} \log(\tau_{sa,t-1}) + \sigma_{sa} \varepsilon_{sa,t}
\end{aligned}$$

付録 B 定常化された均衡式一覧

付録 A に記載された均衡式は、実体経済変数はすべて $\mathcal{A}_t = A_t^{\frac{\varphi-1}{(1-\alpha)\nu}}$ の成長率 $\mathcal{A}_t/\mathcal{A}_{t-1} = (A_t/A_{t-1})^{\frac{\varphi-1}{(1-\alpha)\nu}} \equiv \Gamma_t$ で成長するため、モデルが非定常となる。そのため、それらの変数 \mathcal{A}_t で割り込むことでモデルを定常化する。具体的には、以下の変数に関して次のような定常化を考える： $\tilde{Y}_t = Y_t/\mathcal{A}_{t-1}$, $\tilde{C}_t = C_t/\mathcal{A}_{t-1}$, $\tilde{I}_t = I_t/\mathcal{A}_{t-1}$, $\tilde{K}_t = K_t/\mathcal{A}_t$, $\tilde{w}_{u,t} = w_{u,t}/\mathcal{A}_{t-1}$, $\tilde{w}_{s,t} = w_{s,t}/\mathcal{A}_{t-1}$, $\tilde{U}_{mt} = U_{mt}/\mathcal{A}_{t-1}$, $\tilde{V}_t^A = V_t^A/\mathcal{A}_{t-1}$, $\tilde{Z}_t = Z_t/\mathcal{A}_t$, $\tilde{L}_{sat} = L_{sat}/\mathcal{A}_{t-1}$, $\tilde{V}_t^A = V_t^A/\mathcal{A}_{t-1}$, $\tilde{J}_t^Z = J_t^Z/\mathcal{A}_{t-1}$

それら定常変数を用いた均衡式は以下の通りである。

$$\begin{aligned}
L_{s,t-1} + L_{u,t} + L_{h,t} &= N_t \\
L_{s,t} &= (1 - \delta_N)L_{s,t-1} + b_{N,t}N_tP_{s,t} \\
\varsigma\tilde{K}_{t-1} &= \frac{\xi}{1 - \xi} \left(\frac{\tilde{C}_{h,t}}{\tilde{C}_{m,t}} \right)^{\frac{1}{\epsilon}} \tilde{w}_{u,t} \\
N_t\tilde{C}_{h,t} &= \varsigma\tilde{K}_{t-1}L_{h,t} \\
\bar{\Lambda}_{t,t+1} &\equiv \beta \frac{\tilde{U}_{m,t+1}}{\tilde{U}_{m,t}} \\
(1 - \tau_e)E'(P_{s,t}) &= \mathbb{E}_t \bar{\Lambda}_{t,t+1} \left[\frac{\tilde{w}_{u,t+1}}{\tilde{w}_{u,t}} \left(\left(\frac{\tilde{w}_{s,t+1}}{\tilde{w}_{u,t+1}} - 1 \right) + (1 - \tau_e)(1 - \delta_N)E'(P_{s,t+1}) \right) \right] \\
E'(P_{s,t}) &= \frac{a_e}{1 - P_{s,t}} \left(\frac{1 - L_{s,t-1}/N_t}{1 - P_{s,t}} \right)^\eta \\
\tilde{U}_{m,t} &= \xi \left(\frac{\tilde{C}_t}{\tilde{C}_{m,t}} \right)^{\frac{1}{\epsilon}} \left[\frac{N_t}{\tilde{C}_t - h\tilde{C}_{t-1}/\Gamma_{t-1}} - \beta \mathbb{E}_t \frac{hN_{t+1}}{\Gamma_t\tilde{C}_{t+1} - h\tilde{C}_t} \right] \\
\tilde{C}_t &= \left[\xi \tilde{C}_{m,t}^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} + (1 - \xi)\tilde{C}_{h,t}^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} \right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} \\
\frac{\Gamma_t}{r_t} &= \mathbb{E}_t \{ \bar{\Lambda}_{t,t+1} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_t \tilde{K}_t &= \frac{1}{\Gamma_t} \left[(1 - \delta(U_t)) N_{t-1} \tilde{K}_{t-1} + \left(1 - f \left(\frac{\tilde{I}_t}{\tilde{I}_{t-1}} \right) \right) N_t \tilde{I}_t \right] \\
 Q_t &= \mathbb{E}_t \left[\frac{\bar{\Lambda}_{t,t+1}}{\Gamma_t} (r_{k,t+1} U_{t+1} + Q_{t+1} (1 - \delta(U_{t+1}))) \right] \\
 r_{k,t} &= Q_t \delta'(U_t) \\
 1 &= Q_t \left\{ 1 - f \left(\frac{\tilde{I}_t}{\tilde{I}_{t-1}} \right) - f' \left(\frac{\tilde{I}_t}{\tilde{I}_{t-1}} \right) \frac{\tilde{I}_t}{\tilde{I}_{t-1}} \right\} \\
 &\quad + \mathbb{E}_t \bar{\Lambda}_{t,t+1} \left[Q_{t+1} f' \left(\frac{\tilde{I}_{t+1}}{\tilde{I}_t} \right) \left(\frac{\tilde{I}_{t+1}}{\tilde{I}_t} \right)^2 \frac{N_{t+1}}{N_t} \right] \\
 \tilde{Y}_t &= \theta_t \left[(U_t N_t \tilde{K}_{t-1})^\alpha (L_{u,t-1})^{1-\alpha} \right]^\nu M_t^{1-\nu} \\
 (1 - \alpha) \nu \frac{\tilde{Y}_t}{L_{u,t}} &= \vartheta \tilde{w}_{u,t} \\
 \alpha \nu \frac{\tilde{Y}_t}{U_t N_t \tilde{K}_{t-1}} &= \vartheta r_{k,t} \\
 (1 - \nu) \frac{\tilde{Y}_t}{\tilde{M}_t} &= \vartheta P_{M,t} \\
 \Gamma_{A,t} &= \frac{A_t}{A_{t-1}} = \lambda_t \phi \left(\tilde{Z}_{t-1} - 1 \right) + \phi \\
 \lambda_t &= \kappa \lambda \left(\tilde{L}_{sa,t} \right)^{\rho \lambda} \\
 \rho \lambda \lambda_t \phi \mathbb{E}_t \left[\frac{\bar{\Lambda}_{t,t+1}}{\Gamma_{A,t}} \left(\tilde{V}_{t+1}^A \tilde{Z}_{t-1} - \tilde{J}_{t+1}^Z \frac{\tilde{Z}_{t-1}}{\tilde{Z}_t} \right) \right] &= (1 - \tau_{sa,t}) \tilde{w}_{s,t} \tilde{L}_{sa,t} \\
 \frac{\tilde{Z}_t}{\tilde{Z}_{t-1}} \Gamma_{A,t} &= \chi_t (L_{sr,t})^{\rho z} + \phi \\
 \mathbb{E}_t \left[\frac{\bar{\Lambda}_{t,t+1}}{\Gamma_{A,t}} \tilde{J}_{t+1}^Z \chi_t \frac{\tilde{Z}_{t-1}}{\tilde{Z}_t} L_{sr,t}^{\rho z - 1} \right] &= (1 - \tau_{sr,t}) \tilde{w}_{s,t} \\
 \tilde{J}_t^Z &= -(1 - \tau_{sa,t}) \tilde{w}_{s,t} \tilde{L}_{sa,t} + \phi \mathbb{E}_t \left[\frac{\bar{\Lambda}_{t,t+1}}{\Gamma_{A,t}} \left(\lambda_t \tilde{V}_{t+1}^A \tilde{Z}_t + (1 - \lambda_t) \tilde{J}_{t+1}^Z \frac{\tilde{Z}_{t-1}}{\tilde{Z}_t} \right) \right] \\
 \tilde{V}_t^A &= (1 - \tau_{\pi t}) \left(\frac{\vartheta - 1}{\vartheta} \right) \tilde{Y}_t + \phi \mathbb{E}_t \left[\frac{\bar{\Lambda}_{t,t+1}}{\Gamma_{A,t}} \tilde{V}_{t+1}^A \right] \\
 L_{s,t-1} &= \left(1 - \frac{1}{\tilde{Z}_t} \right) \tilde{L}_{sa,t} + L_{sr,t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_t &= N_t \tilde{C}_{m,t} + \frac{a_e}{\eta} \left[\left(\frac{1 - L_{s,t-1}/N_t}{1 - P_{s,t}} \right)^\eta - 1 \right] \tilde{w}_{u,t} b_{N,t} N_t + p_{I,t} N_t \tilde{I}_t + \tilde{G}_t, \\ \tilde{G}_t &= \tilde{Y}_t g_t \\ \Gamma_t &= \frac{\mathcal{A}_t}{\mathcal{A}_{t-1}} = (\Gamma_{A,t})^{\frac{\vartheta-1}{1-\alpha}}\end{aligned}$$

付録 C 定常状態

$$\begin{aligned}\frac{L_s}{N} &= P_s \\ N &= L_u + L_s + L_h \\ \varsigma \tilde{K} &= \frac{\xi}{1-\xi} \left(\frac{\tilde{C}_h}{\tilde{C}_m} \right)^{\frac{1}{\epsilon}} \tilde{w}_u \\ N \tilde{C}_h &= \varsigma \tilde{K} L_h \\ (1 - \tau_e) \frac{a_e}{1 - \bar{P}_s} &= \frac{\beta}{1 - \beta(1 - \delta_N)} \left(\frac{\tilde{w}_s}{\tilde{w}_u} - 1 \right) \\ \frac{\tilde{C}}{\tilde{C}_m} &= \left[\xi + (1 - \xi) \left(\frac{\tilde{C}_h}{\tilde{C}_m} \right)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} \right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} \\ \tilde{I} &= (\Gamma - 1 + \delta) \tilde{K} \\ \tilde{Y} &= \theta \left[(N \tilde{K})^\alpha L_u^{1-\alpha} \right]^\nu \tilde{M}^{1-\nu} \\ r_k &= d_1 \\ \frac{\Gamma}{\beta} &= r_k + 1 - \delta \\ \tilde{w}_u &= \frac{(1 - \alpha)\nu}{\vartheta} \frac{\tilde{Y}}{L_u} \\ r_k &= \frac{\alpha\nu}{\vartheta} \frac{\tilde{Y}}{N \tilde{K}} \\ \frac{1 - \nu}{\vartheta} \frac{\tilde{Y}}{\tilde{M}} &= 1 \\ \Gamma_A &= \phi \left[\lambda (\tilde{Z} - 1) + 1 \right] \\ \lambda &= \kappa_\lambda \left(\tilde{L}_{sa} \right)^{\rho_\lambda} \\ \rho_\lambda \lambda \phi \left[(\beta/\Gamma_A) \left(\tilde{V}^A \tilde{Z} - \tilde{J}^Z \right) \right] &= (1 - \tau_{sa}) \tilde{w}_s \tilde{L}_{sa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_A &= \chi (L_{sr})^{\rho_z} + \phi \\ \tilde{J}^Z &= \frac{1}{1 - \phi(1 - \lambda)(\beta/\Gamma_A)} \left[-(1 - \tau_{sa})\tilde{w}_s\tilde{L}_{sa} + \phi\lambda(\beta/\Gamma_A)\tilde{V}^A\tilde{Z} \right] \\ (\beta/\Gamma_A)\tilde{J}^Z\chi(L_{sr})^{\rho_z-1} &= (1 - \tau_{sr})\tilde{w}_s \\ \tilde{V}^A &= \frac{1 - \tau_\pi}{1 - \phi(\beta/\Gamma_A)} \left(\frac{\vartheta - 1}{\vartheta} \right) \tilde{Y} \\ L_s &= \left(\frac{\tilde{Z} - 1}{\tilde{Z}} \right) \tilde{L}_{sa} + L_{sr} \\ 1 &= \frac{N\tilde{C}}{\tilde{Y}} + \frac{p_I N\tilde{I}}{\tilde{Y}} + g \\ \Gamma &= (\Gamma_A)^{\frac{\vartheta-1}{1-\alpha}} \end{aligned}$$