研究レポート

局所線形予測によるインパルス応答推定
―定式化の誤りに対する頑健性の観点から―

経済社会総合研究所主任研究官
清谷　春樹

1　序論

景気変動の応用研究において、生産性の変動など外生的ショックや財政・金融政策の波及経路についての知見の蓄積は、実証的なインパルス応答関数の分析に負う部分が大きい。インパルス応答の推定は、多変量自己回帰（Vector Autoregression, VAR）で得た係数推定値の繰返し代入により推定を行うことが一般的である。ところがこの方法は、分析対象となる経済時系列の生成過程に一定次数のVARという特定の構造を課すものであり、この定式化が真のデータ生成過程と異なる場合には、推定値はバイアスを伴ったものとなる。

これに対して、データ生成過程の構造について特段の仮定を置かず、局所線形予測（Local Linear Projection, LLP）により各期のインパルス応答を個別に推定するという方法がJordà（2005）により提唱されている。本稿は、金融政策の波及経路の分析で広くみられるようなマクロ経済変数の体系を題材に、定式化の誤りがVARによるインパルス応答の推定に及ぼす影響の大きさを示すとともに、LLPによる推定量の頑健性について検証する。

2　インパルス応答の推定：多変量自己回帰と局所線形予測

実証的なインパルス応答関数は、いかなる定常過程$\{\mathbf{y}_t\}$も無限次数の移動平均：

$$\mathbf{y}_t=\boldsymbol{\mu}_t+\boldsymbol{\varepsilon}_t+\boldsymbol{\psi}_1\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}+\boldsymbol{\psi}_2\boldsymbol{\varepsilon}_{t-2}+\cdots=\boldsymbol{\psi}(L)\,\boldsymbol{\varepsilon}_t \quad . \qquad (1)$$

によって表現が可能であるとのWoldの定理に基礎を置く。係数行列$\boldsymbol{\psi}_s$は

$$\boldsymbol{\psi}_s=\frac{\partial \mathbf{y}_{t+s}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}'_t} \quad .$$

と解釈することが可能であり、$\mathbf{y}_{t+s}$の第j成分の$\boldsymbol{\varepsilon}_t$の第$i$成分についての偏微係数は、時点$t$に発生した変数$i$のショックに対する$s$期後の変数$j$のインパルス応答を意味する。

次数pのVARによる推定では、

$\mathbf{Y}'_t=\left(\mathbf{y}'_t\mathbf{y}'_{t-1}\cdots\mathbf{y}'_{t-p}\right)$の推計式

$$\mathbf{Y}_t=\hat{\mathbf{F}}\,\mathbf{Y}_{t-1}+\hat{\mathbf{U}}_t \quad . \qquad (2)$$

を右辺の$\mathbf{Y}$のラグ項に繰り返し代入することにより、

$$\mathbf{Y}_t=\hat{\mathbf{U}}_t+\hat{\mathbf{F}}\,\hat{\mathbf{U}}_{t-1}+\hat{\mathbf{F}}^2\hat{\mathbf{U}}_{t-2}+\cdots=\sum_{s=0}^{\infty}\hat{\mathbf{F}}^s\hat{\mathbf{U}}_{t-s} \quad . \qquad (3)$$

として、$\hat{\mathbf{F}}^s$より$\boldsymbol{\psi}_s$の推定値を得る。この方法の問題点は、実際のデータ生成過程が（2）式とは異なる場合に$\hat{\mathbf{F}}$がバイアスを伴う推定値となり、期近の推定値のバイアスが更に先の期間の推定値へと持ち越されてしまう点である。とりわけ、2期目以降のインパルス応答の推定値が$\hat{\mathbf{F}}$の累乗で与えられることから、（2）式と真のデータ生成過程との食い違いが大きい場合には、より先の期間の推定値ほどバイアスが増幅されていく危険性がある。

これに対してJordà（2005）の提唱するLLPによる推定方法は、h期先までのインパルス応答を、以下のようにs期先に固有のh個の局所線形予測式に基づき推定するものである。

$$\mathbf{y}_{t+s}=\hat{\boldsymbol{\alpha}}^s+\hat{\mathbf{B}}_1^{s+1}\mathbf{y}_{t-1}+\hat{\mathbf{B}}_2^{s+1}\mathbf{y}_{t-2}+\cdots+\hat{\mathbf{B}}_p^{s+1}\mathbf{y}_{t-p}+\hat{\mathbf{u}}_{t+s}^s,$$
$$s=0,1,2,\cdots h \quad . \qquad (4)$$

このとき、$\hat{\mathbf{B}}_1^0=\mathbf{I}$として、$\hat{\mathbf{B}}_1^s$が$t$期に発生したショックに対する$t+s$期におけるインパルス応答$\boldsymbol{\psi}_s$の推定値を表す。この手法の特徴は、$s$期先の各時点に固有の推計式に基づいた推定を行うことで、期近の予測式における定式化の誤りの影響を先の予測期間に及ぼさないという点にある[1]。

3　定式化の誤りがインパルス応答の推定値に及ぼす影響

もっとも、（2）式がデータ生成過程を正しく表現している場合には、不偏性だけでなく効率性の観点からも望ましい推定値を得ることができる。従って、いず

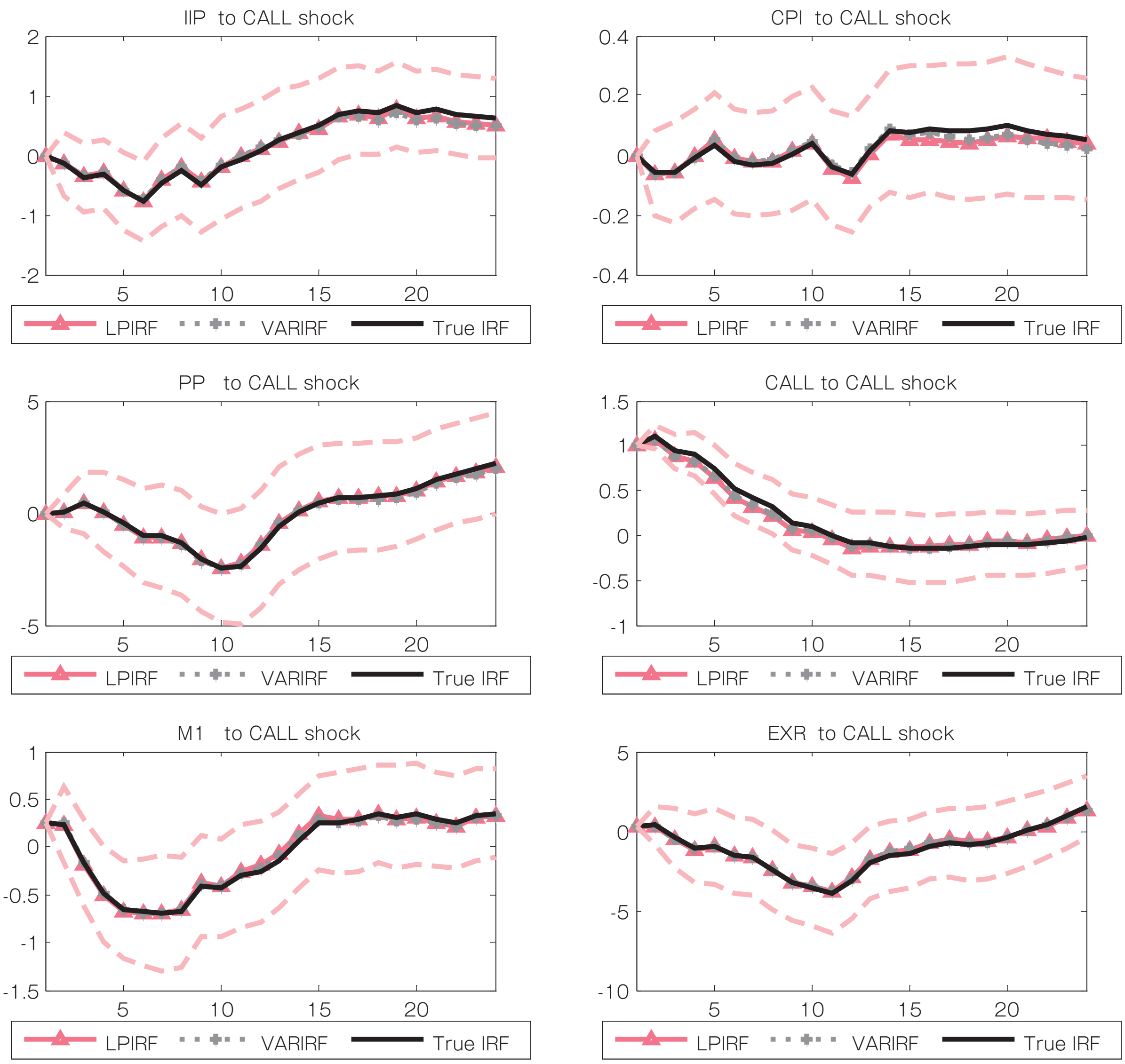
1　一般に（4）式に基づく多段階の予測は、標本数が大きくなるほど真の値に近づき（一致性）、また、漸近正規性を満たす（Weiss, 1991）。

れの方法を用いるべきかは、分析対象となるデータの特性に応じて、推定量の効率性と不偏性のいずれを重視すべきかに応じて判断されるべき問題であり、優れて実証的な問題といえる。

そこで本稿では、我が国の金融政策波及経路の分析において頻繁に用いられる、鉱工業生産（IIP）、消費者物価上昇率（CPI）、一次産品価格変化率（PP）、短期金利（CALL）、マネーサプライ（M1）、円ドルレート（EXR）の6変数の月次データ[2]から成る体系について、VARの推計式がデータ生成過程を正しく定式化できている場合と、定式化の誤りを犯している場合の双方について、LLPによる推定とのパフォーマンスの比較を行う。具体的には、1975年1月から1999年12月までの300期の統計から推計された12期のラグをもつVARをデータ生成過程と仮定し、コレスキー分解により直交化された推計残差の分散・共分散行列を基に構造ショックを乱数発生させて300期の時系列を200回発生させ、コールレートの引上げに対する各変数の反応を2つの方法で推定するという実験を行う。

図1は、12期のラグ変数を用いた正しい定式化の下

図1－1　12期ラグの定式化による推定（平均値）



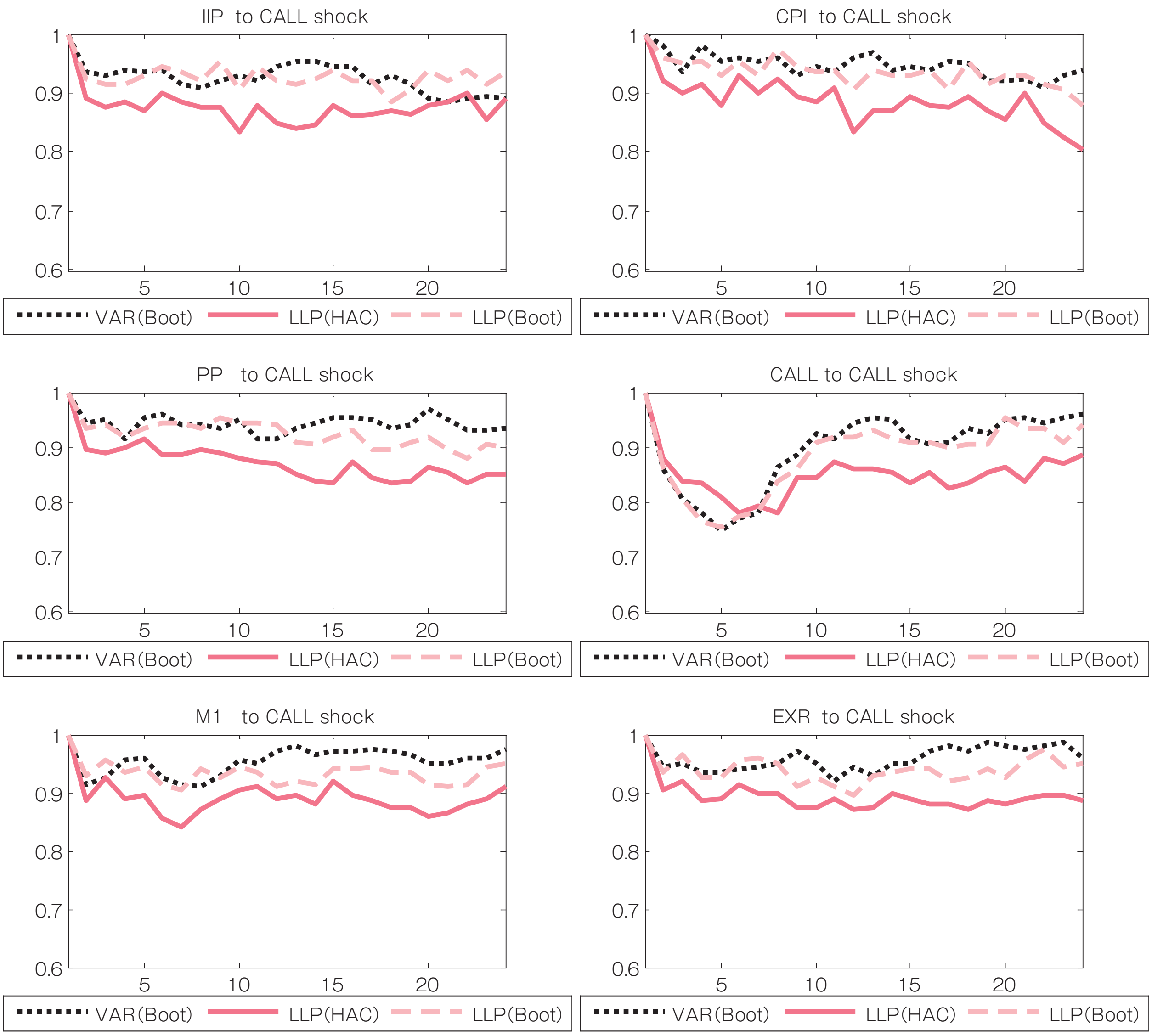
（注）
1. 実線はデータ生成過程から導出された真のインパルス応答を表し、破線は標本誤差（乱数発生させた標本に対しデータ生成過程と整合的な定式化の下で得られるインパルス応答の推定値の上限97.5%及び下限2.5%）を表す。
2. △印を付した実線はLLPによる推定値、＋印を付した点線はVARによる推定値。

2　コールレート以外の変数はOECD.Stat Extracts、コールレート（有担保翌日物月中平均）は日本銀行より引用。一次産品価格変化率を加えるのは、後述する「物価パズル」の緩和が目的であるが、使用した標本においては顕著な改善は見られず、金融政策はインフレに対して有意な影響をもたない結果となった。なお、各系列ともホドリック＝プレスコットフィルターによりトレンドを抽出し定常化させた。

でのインパルス応答係数の推定値の平均値及び95%信頼区間の被覆確率を示す。信頼区間はVARについてはブートストラップ法により導出した。他方、LLPの場合には、推計式(4)の残差 $\hat{\mathbf{u}}^{s}_{t+s}$ からインパルス応答係数の分散・共分散を推計することが可能であることから、不均一分散及び系列相関を考慮した上で(Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent, HAC)導出した信頼区間と、ブートストラップ法による信頼区間の双方を導出した[3]。正しいラグ次数の選択の下では、いずれの方法とも推定値の平均値は真の値に近く、偏りの無い推定量が得られている(図1－1)が、被覆確率は全般的にVARの信頼区間の精度の方が高い。とりわけLLPによる場合には、HACによる信頼区間の被覆確率が90%を下回る期間が多数にのぼるなど、正しい定式化の下ではVARによる推計に分がある結果となった(図1－2)。

これに対して図2は、ラグ次数の選択を誤り4期のラグ変数のみを用いて推定を行った場合の結果を示している。VARによる推計値は、コールレートの引上げに対して、1)鉱工業生産の当初の落ち込みとその後の反動を捉えられない、2)「物価パズル」(金融引締めに対して消費者物価が当初上昇するという実証上の問題

図1－2　12期ラグの定式化による推定(95%信頼区間の被覆確率)



(注)
　実線はLLPによる推定の予測誤差の分散・共分散行列から導出した95%信頼区間、破線はブートストラップ法により導出したLLPによる推定値の95%信頼区間、点線はブートストラップ法により導出したVARによる推定値の95%信頼区間の被覆確率を表す。

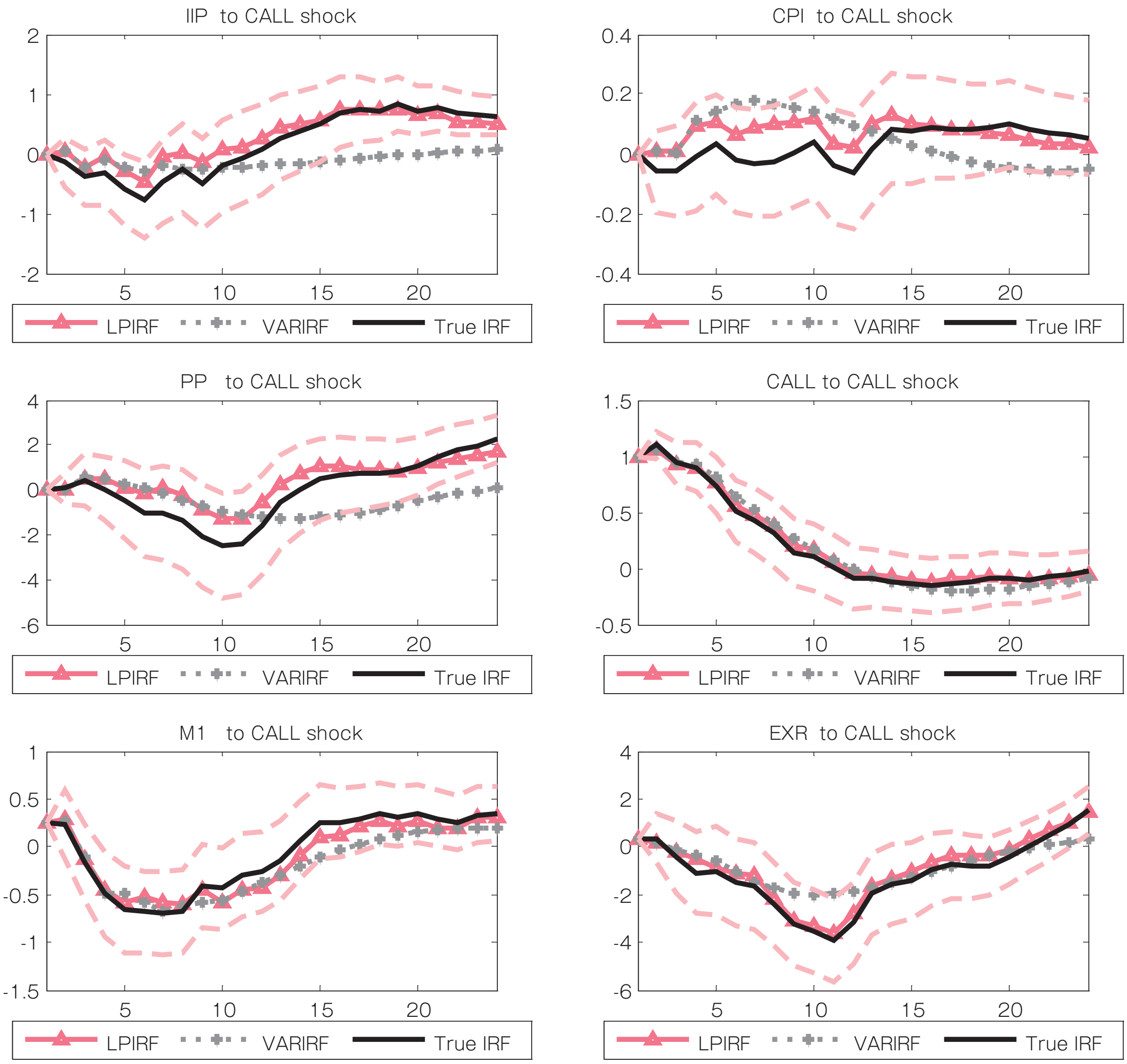
3　ブートストラップ法については、VAR及び局所線形予測とも300回の繰返し抽出と再推計を行い、再推計値の97.5パーセンタイルと2.5パーセンタイルを信頼区間の上限・下限とした。

点）が強調される、3）11か月後をピークとする為替レートの増価を過小評価してしまう等の問題を引き起こすことが分かる（図2－1）。推定量の中心値が真の値から乖離することにより、信頼区間も極めて精度の悪いものとなる（図2－2）。これに対し、LLPによる推計値は、いずれの変数のインパルス応答係数も推定量の中心値が標本誤差の範囲内に収まっており、信頼区間の精度にも目立って悪化している箇所がみられず、定式化の誤りに対して頑健であることが分かる。

4　結語

実証的なインパルス応答の推定はVARの推計によることが一般的であるが、本稿の実験は、この方法が定式化の誤りに対して脆弱である一方、LLPによる方法が比較的頑健な推定値を与えることを示している。真のデータ生成過程を知ることができないという現実社会の制約条件を考慮すれば、推計式の定式化が正しいことに賭けて推定量の効率性を追求するよりも、定式化の誤りに対しても頑健な推定を行うことで大きな誤りを回避することが賢明であろう。実証的なインパルス応答関数が、理論研究の発展の道標にもなってきたことを踏まえると、LLPのような新たな手法を用いて、これまでの実証結果の吟味を行うことにより新たな知見がもたらされることも考えられる。

図2－1　4期ラグの定式化による推定（平均値）



（注）
1. 実線はデータ生成過程から導出された真のインパルス応答を表し、破線は標本誤差（乱数発生させた標本に対しデータ生成過程と整合的な定式化の下で得られるインパルス応答の推定値の上限97.5%及び下限2.5%）を表す。
2. △印を付した実線はLLPによる推定値、＋印を付した点線はVARによる推定値。

最後に、VARによる推定値の信頼区間については、既にKilian (1998) やKilian and Chang (2000) が小標本の場合のバイアスの問題を指摘し、これを補正した信頼区間の導出を提唱している。また、Kilian and Kim (2011) は、LLPによる推定も小標本バイアスから逃れられない点を指摘している。本稿では比較的長い時系列データによる検証を行ったが、小標本の問題への回答を探ることもまた今後の課題となろう。

参考文献

Jordà, Òscar. "Estimation and Inference of Impulse Responses by Local Projections." *American Economic Review*, Vol. 95, No. 1, pp.161-182, 2005.

Kilian, Lutz. "Small-Sample Confidence Intervals for Impulse Response Functions." *Review of Economics and Statistics*, Vol.80, Issue 2, pp.218-230, 1998.

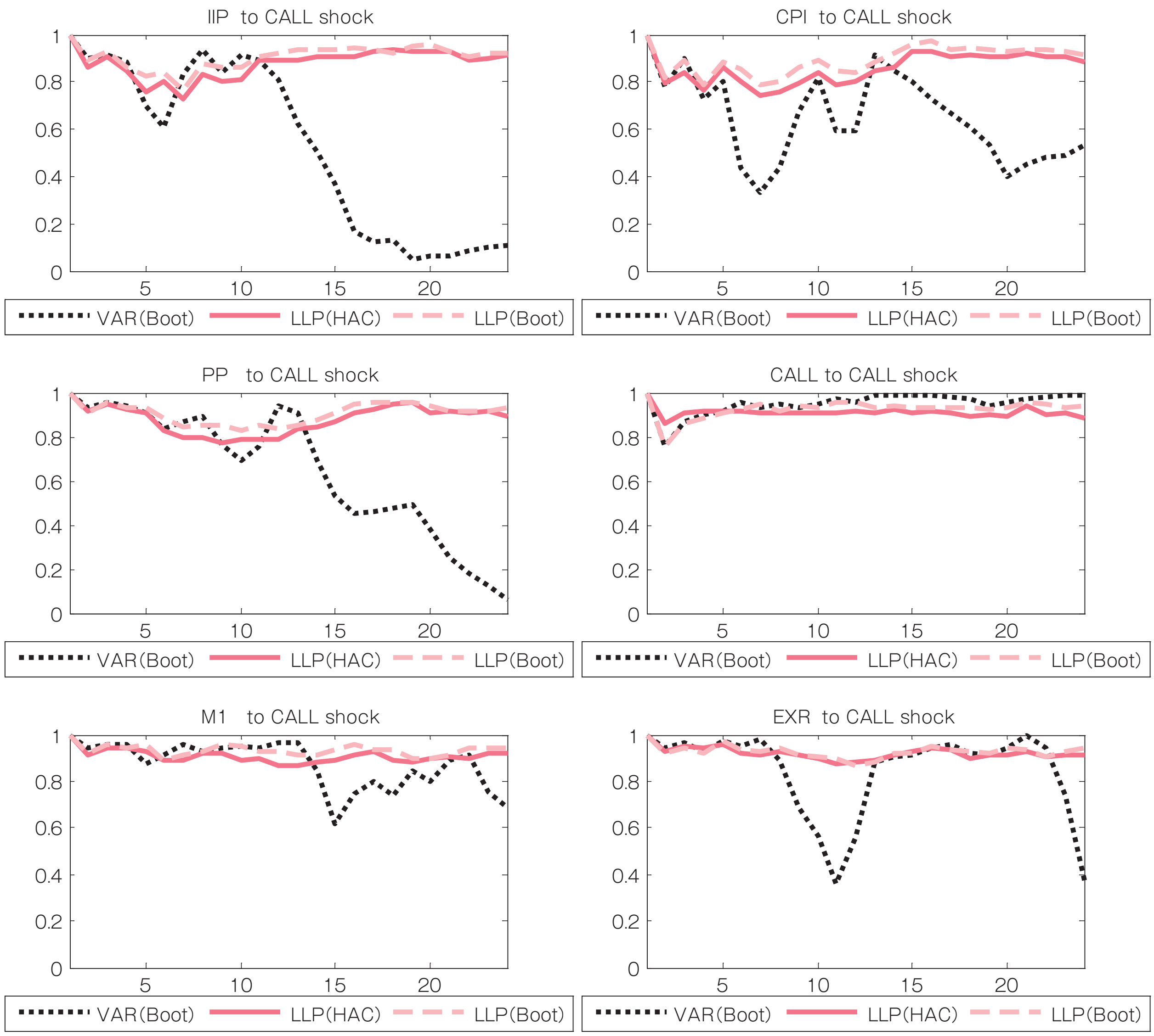
__________., and Pao-Li Chang. "How Accurate are Confidence Intervals for Impulse Responses in Large VAR Models?" *Economics Letters*, Vol.69, Issue 3, pp.299-307, 2000.

__________., and Yun Jung Kim. "How Reliable Are Local Projection Estimators of Impulse Responses?" *Review of Economics and Statistics*, Vol.93, No. 4, pp. 1460-1466, 2011.

Weiss, Andrew A. "Multi-Step Estimation and Forecasting in Dynamic Models." *Journal of Econometrics*, Vol.48, Issue 1-2, pp.135-149, 1991.

清谷　春樹（せいたに　はるき）

図２－２　４期ラグの定式化による推定（95%信頼区間の被覆確率）



（注）
実線はLLPによる推定の予測誤差の分散・共分散行列から導出した95%信頼区間、破線はブートストラップ法により導出したLLPによる推定値の95%信頼区間、点線はブートストラップ法により導出したVARによる推定値の95%信頼区間の被覆確率を表す。