

# DSGEモデル分析の特徴と課題

## ESRI: 「DSGEモデル入門セミナー」

藤原一平

慶應/ANU/RIETI

1/29 2016

## イントロダクション

## Why DSGE?

## 景気循環の特徴

## モデルの導出、解法、推定

## ニュー・ケインジアン・モデル

## 今後の課題

- ▶ 本スライドの内容は、青木浩介・藤原一平、「中級マクロ経済学（仮題）」、日本評論社より近日公刊予定、より抜粋したもの。
- ▶ 本スライドの内容を、引用、転載される場合には、まずは、筆者にご相談ください。

# 目的

## イントロダクション

### Why DSGE?

### 景気循環の特徴

### モデルの導出、解法、推定

### ニュー・ケインジアン・モデル

### 今後の課題

- ▶ Why?: なぜ、DSGEモデルを用いる必要があるのか？
  - ▶ Dynamic Stochastic General Equilibrium (動学確率一般均衡モデル)
- ▶ How?: どのような、目的にDSGEモデルが役立つのか？
  - ▶ シンプルなDSGEモデルの概要も紹介。
- ▶ DSGEを用いた分析の今後の課題は何か？

# 構成

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

1. Why DSGE?
2. 景気循環の特徴
3. モデルの導出、解法、推定
4. ニュー・ケインジアン・モデル
5. 今後の課題

# 本スライドの構成

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

1. Why DSGE?
2. 景気循環の特徴
3. モデルの導出、解法、推定
4. ニュー・ケインジアン・モデル
5. 今後の課題

# 識別

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

- ▶ 相関  $\neq$  因果
- ▶ AとBが同じような動きをしていても、 $A \Rightarrow B$ 、ないし、 $B \Rightarrow A$ の因果関係を示すわけではない。
  - ▶ 「雨が降る」 $\Rightarrow$ 「傘をさす人が多い」は因果かもしれないが、「傘をさす人が多い」 $\Rightarrow$ 「雨が降る」はおかしい。
  - ▶ そのほかに、Cという現象が、AとBを発生させている可能性もある。
- ▶ 経済学では、ある主体が行動を変えると、他の主体も行動を変える可能性がある。
  - ▶ 社会科学においては、識別がとても難しい。

## 金融政策と経済活動

イントロダクション

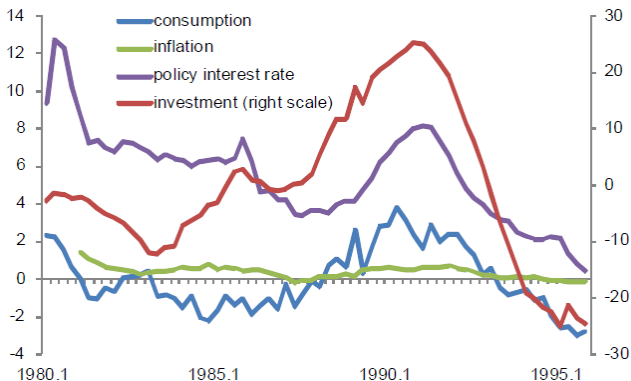
Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題



消費と投資はトレンドからの乖離(%)。

- ▶ [ 観察事実 ] 政策金利が上昇する時、消費、投資、インフレ率も上昇している。
- ▶ [ 推論 ] だから、金利を引き上げると、景気がよくなる。
- ▶ それらしい、帰納的推論に見えるが、この事実は相関を示しているだけであり、因果関係を示しているわけではない。
- ▶ これは誤った経済の見方（しかし、こうした誤りは非常に多い）。経済活動と政策金利には、2つの関係が存在する。すなわち、
  - ▶ (A) 経済活動が活発化すると政策金利が引き上げられる。
  - ▶ (B) 政策金利を引き上げて経済活動を沈静化する。
- ▶ 単にデータをみただけでは、(A) $\Rightarrow$ (B)の因果なのか、(B) $\Rightarrow$ (A)の因果なのか、もしくはその背景に共通要因があるのか、わからない。



- ▶ 経済理論や計量経済学を用いて、因果性を識別 (Identify) する必要がある。これこそが、アカデミック・リサーチの役割。
  - ▶ 所得が増えるから GDP が増える、といったよく聞かれる話はどこから始まるのかわからない。
- ▶ 一つの演繹的説明の方法として、
  - ▶ [前提] 予期せぬ政策金利の変更には、(A) のような経路は存在しない。すなわち、その場合、(B) の経路しか存在しない。
  - ▶ [観察事実] 予期せぬ政策金利の変更がなされると、設備投資は減少する。
  - ▶ [推論] 政策金利の上昇は、設備投資を減少させる。
- ▶ この場合、難しいのは、予期せぬ政策金利の変更をどのように識別するか。
  - ▶ 例えば、新聞や金融市場がサプライズと捉えた政策変更時をみつけてくる。
- ▶ 識別能力は、様々なことに応用可能なスキル。

# マクロ経済学における識別

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

- ▶ 実験が難しい。
  - ▶ 開発経済学などでは、Random Experiment を通じた政策効果の測定が頻繁に行われている。
  - ▶ しかし、マクロ経済政策については、その効果を知りたくても、同じようなマクロ経済環境（初期条件）にあることは考えにくい。
  - ▶ 時系列的な分析（例えば、VAR）を用いて、他に依存しない独立ショックを抽出し、それが要因と解釈する方法もある（今回はこちらは扱わない）。
- ▶ 一つの方法として、経済主体の行動をモデル化し、そのモデルの中で、外生的なショックに対するマクロ変数の反応を表現する。そして、これが、現実の動きに近ければ、間接的に要因の識別ができています、と考えることができる。
  - ▶ これこそが、(DSGE) モデルを用いた識別。

# ルーカス批判

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

- ▶ では、どのように、経済主体の行動をモデル化すればよいのか？
- ▶ 例えば、消費税の影響を知るために、単純なOLSで、以下のような推定を行ったとしよう。

$$C_t = \alpha + \beta\tau_t + u_t$$

- ▶ このとき、 $\beta$ は常に一定と考えることができるであろうか？
  - ▶ 税率の変更が恒久的か、一時的かに依存する。
  - ▶ また、税率変更の大きさにも依存する可能性がある。
  - ▶ 政策次第でパラメーターが変化するようなモデルでは、政策効果を計測できない（ルーカス批判）。

- ▶ 経済行動を記述する全てのパラメーターが、政策変更や外生的なショックから影響を受けないモデルならば、政策分析に用いることができる。
  - ▶ DSGEモデルでは、こうした考えに従いモデルが導出される。
  - ▶ このようなモデルは構造系、上記推定式は誘導系と呼ばれる。
  - ▶ このようなパラメーターは、構造パラメーターと呼ばれる。

# 本スライドの構成

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

1. Why DSGE?
2. 景気循環の特徴
3. モデルの導出、解法、推定
4. ニュー・ケインジアン・モデル
5. 今後の課題

# 景気循環とは何か?

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

- ▶ 経済変動は二つに分解できる。
  - ▶ トレンド（成長）
  - ▶ 景気循環
- ▶ 景気循環は、トレンド周りの、数か月から数年にわたる変動。
- ▶ 日本では、内閣府が景気基準日付を決定し、報告

<http://www.esri.cao.go.jp/jp/stat/di/150724hiduke.h>

## トレンド

イントロダクション

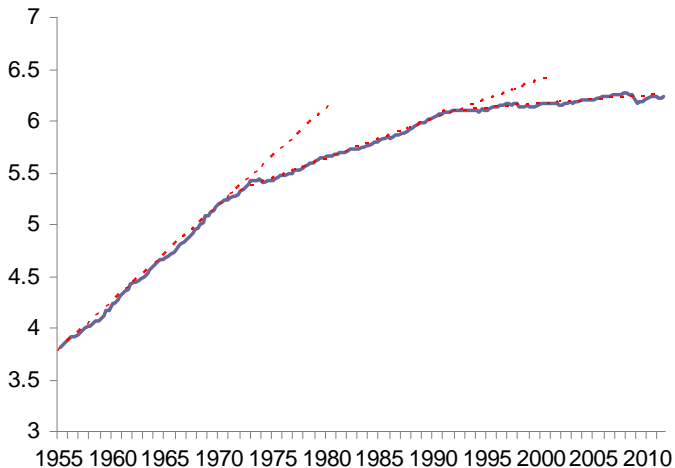
Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題



## 景気循環

イントロダクション

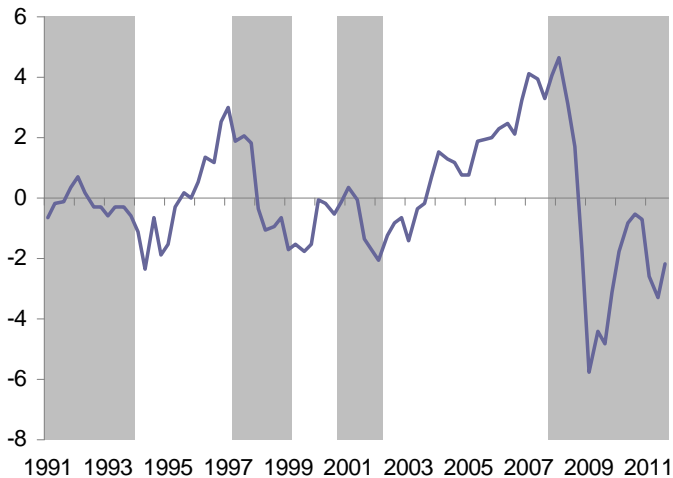
Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題





# どうして景気循環を気にする必要があるのか？

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

- ▶ どちらの経済の方が好ましいか？
  1. 常に100を得る。
  2. 半々の確率で、80か120を得る。
- ▶ 通常、リスク回避的なので、1の方が好まれる。
- ▶ 1と2の経済厚生之差は、景気循環のコストとなる。
- ▶ 金融政策、財政政策といった安定化政策は、このコストを小さくするものとして有用。
  - ▶ 標準的な理論では、成長率を長期的に引き上げるものではない。
- ▶ 短期的には、トレンドの傾きを引き上げる政策は容易ではない。

イントロダクション

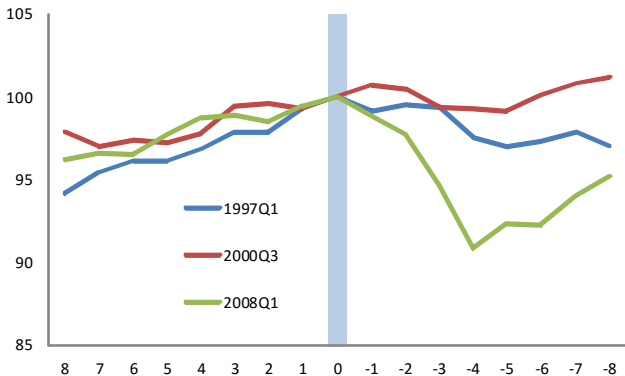
Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題



## 消費

イントロダクション

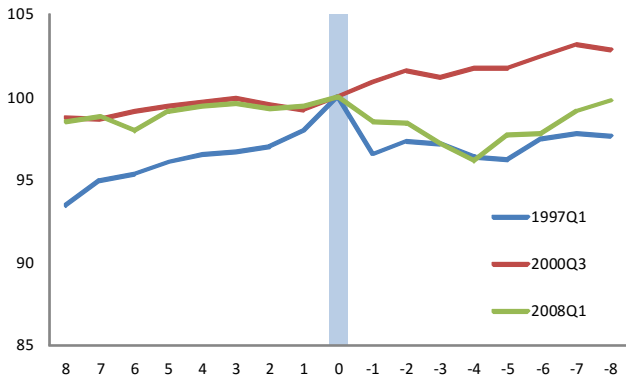
Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題



## 設備投資

イントロダクション

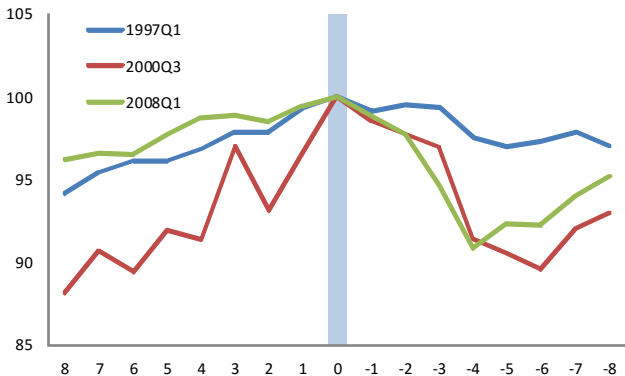
Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題



## 労働時間

イントロダクション

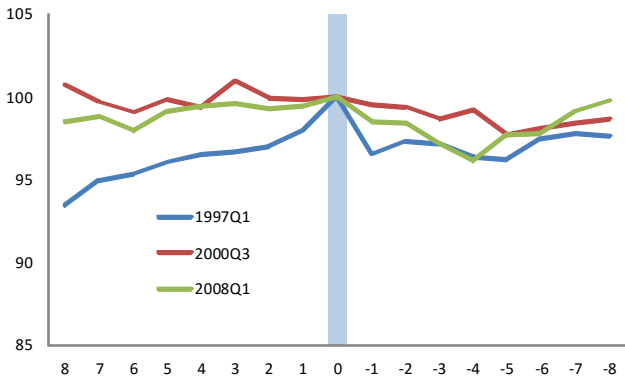
Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題



## 失業率

イントロダクション

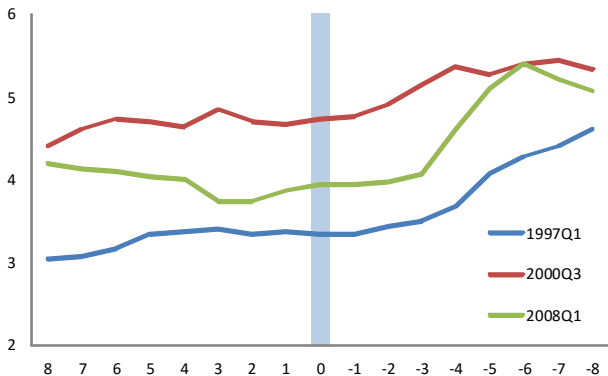
Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題



# 景気循環の特徴

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

- ▶ 生産、消費、投資、労働投入の共変動。
- ▶ 投資よりもスムーズな消費変動。
- ▶ どのようなモデルが、このような特徴を捉えることができるのか？
  - ▶ 一時的な技術（供給）ショックに対するリアル・ビジネス・サイクル・(RBC)モデル
  - ▶ 一時的な金融政策（需要）ショックに対するニュー・ケインジアン・モデル

## 2 期間のRBCモデル

- ▶ 社会計画者が、消費者の効用

$$W = \ln(C_1) - \frac{\chi}{2} h_1^2 + \beta \left[ \ln(C_2) - \frac{\chi}{2} h_2^2 \right],$$

を、今期の資源制約

$$C_1 + K_1 - (1 - \delta) \bar{K}_0 = \bar{Z}_1 \bar{K}_0^\alpha h_1^{1-\alpha},$$

と来期の資源制約と

$$C_2 = \bar{Z}_2 K_1^\alpha h_2^{1-\alpha} + (1 - \delta) K_1.$$

外生変数 ( $\bar{K}_0$ 、 $\bar{Z}_1$  と  $\bar{Z}_2$ ) を所与として最大化する。

- ▶ このようなモデルのパラメーターは、政策や外生ショックから独立と考えることができる。
- ▶ 歪みの存在しない経済では、社会計画者問題の解と競争均衡解が一致する (厚生経済学の第二基本定理)。



## Lagrangian

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

- ▶ 社会計画者は以下を最大化するように、 $C_1$ 、 $C_2$ 、 $h_1$ 、 $h_2$ 、 $K_1$  を選択する。

$$\begin{aligned} & \ln(C_1) - \frac{\lambda}{2} h_1^2 + \beta \left[ \ln(C_2) - \frac{\lambda}{2} h_2^2 \right] \\ & - \lambda_1 [C_1 + K_1 - (1 - \delta) \bar{K}_0 - \bar{Z}_1 \bar{K}_0^\alpha h_1^{1-\alpha}] \\ & - \beta \lambda_2 [C_2 - \bar{Z}_2 K_1^\alpha h_2^{1-\alpha} + (1 - \delta) K_1]. \end{aligned}$$

## FONCs

- ▶ 一回の必要条件として、以下が導出できる。

$$\frac{1}{C_1} = \lambda_1,$$

$$\frac{1}{C_2} = \lambda_2,$$

$$\chi h_1 = \lambda_1 (1 - \alpha) \bar{Z}_1 \bar{K}_0^\alpha h_1^{-\alpha},$$

$$\chi h_2 = \lambda_2 (1 - \alpha) \bar{Z}_2 K_1^\alpha h_2^{-\alpha},$$

$$\lambda_1 = \beta \lambda_2 [\alpha \bar{Z}_2 K_1^{\alpha-1} h_2^{1-\alpha} + (1 - \delta)],$$

$$C_1 + K_1 - (1 - \delta) \bar{K}_0 = \bar{Z}_1 \bar{K}_0^\alpha h_1^{1-\alpha},$$

and

$$C_2 = \bar{Z}_2 K_1^\alpha h_2^{1-\alpha} + (1 - \delta) K_1.$$

- ▶ 7個の内生変数に対し、7本の式があるため、解が求まる。

- ▶ 代入を通じて、ラグランジュ乗数を除去すると、以下に変形できる。

1. 労働市場の均衡条件:

$$\chi h_1 = \frac{1}{C_1} (1 - \alpha) \bar{Z}_1 \bar{K}_0^\alpha h_1^{-\alpha},$$

$$\chi h_2 = \frac{1}{C_2} (1 - \alpha) \bar{Z}_2 K_1^\alpha h_2^{-\alpha},$$

左辺の労働に伴う限界負効用は、労働の限界生産物に消費の限界効用をかけたものに等しい。

2. 消費のオイラー方程式:

$$\frac{1}{C_1} = \beta \frac{1}{C_2} \left[ \alpha \bar{Z}_2 K_1^{\alpha-1} h_2^{1-\alpha} + (1 - \delta) \right],$$

今日の消費からの限界効用は、貯蓄から得られる来季の生産物を消費した場合の限界効用を割り引いたものに等しい。

## ▶ 3 資源制約:

$$\begin{aligned}C_1 + K_1 - (1 - \delta) \bar{K}_0 &= \bar{Z}_1 \bar{K}_0^\alpha h_1^{1-\alpha}, \\C_2 &= \bar{Z}_2 K_1^\alpha h_2^{1-\alpha} + (1 - \delta) K_1.\end{aligned}$$

# 一時的な技術ショック

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

- ▶  $Z_1$  だけが上昇するような一時的な技術ショックを考えよう。
- ▶ 労働市場の均衡条件から、今期の生産性上昇は、今期の限界生産物が相対的に高くなることを意味するため、今期の実質賃金が上昇し、今期の労働供給も増加する。
- ▶ 資源制約に従うと、労働が増えて、技術も高まるので、一期目の消費と投資の和は増加するはず。

$$C_1 + K_1 - (1 - \delta) \bar{K}_0 = C_1 + I_1 = Y_1$$

- ▶ ただ、 $C_1$  と  $I_1$  の両方が増加するかは、定かではない。

# 消費の平滑化

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

- ▶ 通常、振れの大きな消費よりも、振れの小さい消費を好むはず。
- ▶ 一時的なショックであるため、消費は生産ほど増加しない。貯蓄し、翌期の消費も増やそうとするはず。
- ▶ 結果として、消費と投資の両方が増加するはず。
- ▶ RBCモデルは、景気循環を再現できる。

# シンプルなニュー・ケインジアン・モデル

- ▶ 導出は後述（簡便化のため、Rotemberg 調整コストを用いた）。

- ▶ 動学 IS 曲線:

$$\hat{y}_t = -(\hat{i}_t - \hat{\pi}_{t+1}) + \hat{y}_{t+1}.$$

- ▶ ニュー・ケインジアン・フィリップス曲線:

$$\hat{\pi}_t = \beta \hat{\pi}_{t+1} + \frac{2(\theta - 1)}{\phi} (\hat{y}_t - \hat{z}_t).$$

- ▶ 金融政策ルール（テイラールール）:

$$\hat{i}_t = \alpha \hat{\pi}_t + \hat{u}_t.$$

- ▶ 例えば、負の金融政策ショックは、産出量ギャップを増加し、インフレ率を高める、といった景気循環を再現できる。

# 本スライドの構成

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

1. Why DSGE?
2. 景気循環の特徴
3. **モデルの導出、解法、推定**
4. ニュー・ケインジアン・モデル
5. 今後の課題



# 無期限への展開

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

- ▶ 実際のデータを説明するには、無期限の動学最適化問題を解く必要がある。
- ▶ ただ、解として、内生変数をパラメーターと外生変数で表現することはできない。
- ▶ 無期限のモデルでは、モデルの解は、以下のような形で表現される。

$$X_t = f(X_{t-1}, \bar{Z}_t),$$

ここで、 $X_t$  は内生変数のベクトル、 $Z_t$  は外生変数のベクトル。

- ▶ もしも、モデルの解をこのように再帰的構造で表現できれば、初期値を与えれば、毎期の内生変数の値を求めることが可能となる。

# シンプルなRBCモデル

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

- ▶ 社会計画者は、消費者の経済厚生:

$$\begin{aligned} W &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t, h_t) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[ \ln(C_t) - \frac{\chi}{2} h_t^2 \right], \end{aligned}$$

を、資源制約:

$$C_t + K_t - (1 - \delta) K_{t-1} = f(\bar{Z}_t K_{t-1}, h_t) = \bar{Z}_t K_{t-1}^{\alpha} h_t^{1-\alpha},$$

の下で最大化する。

## Lagrangian

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

- ▶ 社会計画者は、以下を最大化するように、 $C_t$ 、 $h_t$ 、 $K_t$  を選択する。

$$W = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ -\lambda_t \left[ \begin{array}{c} \ln(C_t) - \frac{\chi}{2} h_t^2 \\ C_t + K_t - (1 - \delta) K_{t-1} \\ -\bar{Z}_t K_{t-1}^\alpha h_t^{1-\alpha} \end{array} \right] \right\}.$$

## FONCs

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

- ▶ 一階の必要条件として、以下が導出される。

- ▶ wrt  $C_t$ ,

$$\frac{1}{C_t} = \lambda_t,$$

- ▶ wrt  $h_t$ ,

$$\chi h_t = \lambda_t (1 - \alpha) \bar{Z}_t K_{t-1}^\alpha h_t^{-\alpha},$$

- ▶ wrt  $K_t$ ,

$$\lambda_t = \beta \lambda_{t+1} \left[ \alpha \bar{Z}_{t+1} K_t^{\alpha-1} h_{t+1}^{1-\alpha} + (1 - \delta) \right],$$

- ▶ wrt  $\lambda_t$ ,

$$C_t + K_t - (1 - \delta) K_{t-1} = \bar{Z}_t K_{t-1}^\alpha h_t^{1-\alpha}.$$

- ▶ ラグランジュ乗数を代入によって除去すると、3つの内生変数 ( $C_t$ ,  $h_t$ ,  $K_t$ ) に対し、3本の構造方程式が導出される。

- ▶ 消費のオイラー方程式:

$$\frac{1}{C_t} = \beta \frac{1}{C_{t+1}} \left[ \alpha \bar{Z}_{t+1} K_t^{\alpha-1} h_{t+1}^{1-\alpha} + (1-\delta) \right].$$

- ▶ 資源制約:

$$C_t + K_t - (1-\delta) K_{t-1} = \bar{Z}_t K_{t-1}^{\alpha} h_t^{1-\alpha}.$$

- ▶ 労働市場の均衡条件:

$$\chi h_t = \frac{1}{C_t} (1-\alpha) \bar{Z}_t K_{t-1}^{\alpha} h_t^{-\alpha}.$$

- ▶ さらに、外生的な技術進歩に AR(1) プロセスを仮定。

$$\begin{aligned} \ln(\bar{Z}_t) &= (1-\rho) \ln(\bar{Z}) + \rho \ln(\bar{Z}_{t-1}) + u_t, \\ u_t &\sim N(0, \sigma^2). \end{aligned}$$

- ▶ 以上は、あくまで均衡条件であって、解ではない。それぞれの変数のレベルを決めてはいない。

## 解の導出

- ▶ 上記のようなモデルでは、解析的に解を求めることは難しい。
- ▶ 様々な方法があるが、ここでは、線形近似に基づく未定計数法を紹介する。
- ▶ Dynare は、一次近似の場合、以下のような解を自動的に求める。

$$C_t = C + A_C (K_{t-1} - K),$$

$$K_t = K + A_K (K_{t-1} - K),$$

$$h_t = h + A_h (K_{t-1} - K).$$

- ▶ 議論の単純化のため、ショックは省くが、入っていたとしても、議論に大きな変化はない。
- ▶ 時点のついていない変数は定常状態の値。 $A_C$ 、 $A_K$ 、 $A_h$  は未定係数で、構造パラメーターによってのみ表現される。

## 定常状態

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

- ▶ 解は、モデルを定常状態周りで一次近似することによって得られる。
- ▶ 定常状態、すなわち、ショックのない時に行きつく先は、均衡条件から時点を取り除くことで求まる。

$$\frac{1}{C} = \beta \frac{1}{C} [\alpha K^{\alpha-1} h^{1-\alpha} + (1 - \delta)],$$

$$C + K - (1 - \delta) K = K^{\alpha} h^{1-\alpha},$$

and

$$\chi h = \frac{1}{C} (1 - \alpha) K^{\alpha} h^{-\alpha}.$$

- ▶ 3つの内生変数に、3本の式となるため、定常状態を求めることができる。

## 線形近似

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

- ▶ 次に、定常状態周りで、均衡条件を一次近似する。
- ▶ 消費のオイラー方程式を全微分すると、

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{C^2}dC_t &= -\beta\frac{1}{C^2}\alpha K^{\alpha-1}h^{1-\alpha}dC_{t+1} \\
 &\quad +\beta\frac{1}{C^2}\alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2}h^{1-\alpha}dK_t \\
 &\quad +\beta\frac{1}{C^2}\alpha(1-\alpha)K^{\alpha-1}h^{-\alpha}dh_{t+1} \\
 &\quad -\beta\frac{(1-\delta)}{C^2}dC_{t+1}.
 \end{aligned}$$



▶ ここで、

$$dC_t = C_t - C$$

と捉えると、

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{C^2} (C_t - C) & (1) \\ = & -\beta \frac{1}{C^2} [\alpha K^{\alpha-1} h^{1-\alpha} + (1-\delta)] (C_{t+1} - C) \\ & + \beta \frac{1}{C^2} \alpha (\alpha - 1) K^{\alpha-2} h^{1-\alpha} (K_t - K) \\ & + \beta \frac{1}{C^2} \alpha (1 - \alpha) K^{\alpha-1} h^{-\alpha} (h_{t+1} - h). \end{aligned}$$

- ▶ 他の2つの均衡条件も、以下のように線形近似される。

$$\begin{aligned} & (C_t - C) + (K_t - K) & (2) \\ = & [\alpha K^{\alpha-1} h^{1-\alpha} + (1 - \delta)] (K_{t-1} - K) \\ & + (1 - \alpha) K^\alpha h^{-\alpha} (h_t - h), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \chi (h_t - h) & (3) \\ = & -\frac{1}{C^2} (1 - \alpha) K^\alpha h^{-\alpha} (C_t - C) \\ & + \frac{1}{C} \alpha (1 - \alpha) K^{\alpha-1} h^{-\alpha} (K_{t-1} - K) \\ & - \alpha \frac{1}{C} (1 - \alpha) K^\alpha h^{-\alpha-1} (h_t - h). \end{aligned}$$

- ▶ (1)-(3)式は、以下のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} & \bar{A}(C_{t+1} - C) + \bar{B}(C_t - C) \\ & + \bar{C}(K_t - K) + \bar{D}(h_{t+1} - h) \\ = & 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & (C_t - C) + \bar{F}(K_t - K) \\ & + \bar{G}(K_{t-1} - K) + \bar{H}(h_t - h) \\ = & 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\bar{I}(C_t - C) + \bar{J}(K_{t-1} - K) + \bar{K}(h_t - h) = 0. \quad (6)$$

# 未定計数法

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

- ▶ 解を求めることは、未定係数 ( $A_C$ 、 $A_K$ 、 $A_h$ ) を求めることに等しい。

$$(C_t - C) = A_C (K_{t-1} - K),$$

$$(K_t - K) = A_K (K_{t-1} - K),$$

$$(h_t - h) = A_h (K_{t-1} - K).$$

- ▶ これらを(4)-(6)式に代入する。

- ▶ この結果、以下の3つの式が導出される。

$$\begin{aligned} & \bar{A}A_C A_K (K_{t-1} - K) + \bar{B}A_C (K_{t-1} - K) \\ & + \bar{C}A_K (K_{t-1} - K) + \bar{D}A_h A_K (K_{t-1} - K) \\ = & 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_C (K_{t-1} - K) + \bar{F}A_K (K_{t-1} - K) \\ & + \bar{G} (K_{t-1} - K) + \bar{H}A_h (K_{t-1} - K) \\ = & 0, \end{aligned}$$

$$\bar{I}A_C (K_{t-1} - K) + \bar{J} (K_{t-1} - K) + \bar{K}A_h (K_{t-1} - K) = 0.$$

- ▶ これらがいつも成立するためには、

$$\bar{A}A_C A_K + \bar{B}A_C + \bar{C}A_K + \bar{D}A_h A_K = 0,$$

$$A_C + \bar{F}A_K + \bar{G} + \bar{H}A_h = 0,$$

$$\bar{I}A_C + \bar{J} + \bar{K}A_h = 0,$$

が成立しなくてはならない。

- ▶ 3本の式に、3つの変数( $A_C$ 、 $A_K$ 、 $A_h$ )に3本の式が存在するため、解を求めることができる。
- ▶ Dynareは、こうした解を均衡条件より直接求める。

# カリブレーション

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

- ▶ モデルをシミュレートするためには、パラメーターをセットする必要がある。
- ▶ 一つの実験方法はカリブレーションと呼ばれ、ミクロ計量の先行研究などで得られたパラメーターを直接用いる。

- ▶ 主観的割引率 :

$$\beta = 0.99.$$

- ▶ 減耗率 :

$$\delta = 0.02.$$

- ▶ 資本分配率 :

$$\alpha = 0.3.$$

- ▶ このほか、 $\chi$  については、一つの例として、定常状態の労働時間が30%程度となるようにセットする。

## 推定

- ▶ 近年では、パラメーターを推定して求めることが多い。ショックを含んだ場合、DSGEモデルの解は以下のように表現される。

$$(C_t - C) = A_C (K_{t-1} - K) + B_C \bar{Z}_{t-1} + C_C u_t,$$

$$(K_t - K) = A_K (K_{t-1} - K) + B_K \bar{Z}_{t-1} + C_K u_t,$$

$$(h_t - h) = A_h (K_{t-1} - K) + B_h \bar{Z}_{t-1} + C_h u_t,$$

$$\ln(\bar{Z}_t) = (1 - \rho) \ln(\bar{Z}) + \rho \ln(\bar{Z}_{t-1}) + u_t,$$

$$u_t \sim N(0, \sigma^2).$$

- ▶ 未定係数はすべて、構造パラメーターで表現されるため、最尤法を用いると、一番尤度を高くするパラメーターの組み合わせ ( $\rho$  と  $\sigma$  も含む) として、構造パラメーターを推定できる。



- ▶ そのままの最尤法では、尤度関数がフラットになりがちで、初期値次第で、最尤法推定の結果が異なる、という結果が出やすい。
- ▶ このため、重みをつけて尤度を求めると、パラメーターを求める方法、すなわち、ベイズ最尤法推定が幅広く用いられるようになっている。
  - ▶ ここであるパラメーターについて、ある値のウェイトを100% にすると、カリブレーションとなる。

# 本スライドの構成

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

1. Why DSGE?
2. 景気循環の特徴
3. モデルの導出、解法、推定
4. ニュー・ケインジアン・モデル
5. 今後の課題

# ニュー・ケインジアン・モデルとは何か？

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

- ▶ 価格が常に改定されない、という価格の粘着性を加えたDSGEモデル。
- ▶ 結果として、名目変数の変化が実質変数に影響を与えることとなる。

▶

$$MV = PY,$$

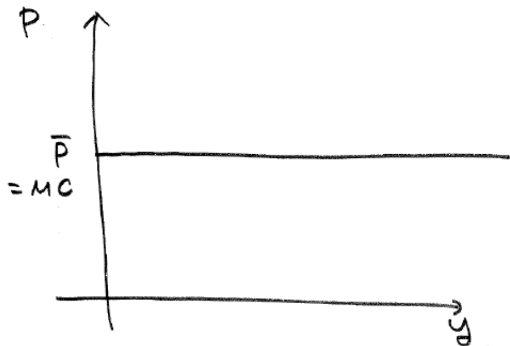
または

$$\frac{M}{P} = kY.$$

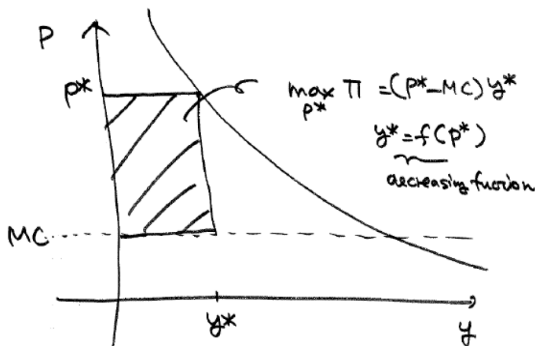
- ▶ 2つの歪みが存在する：(1)独占的競争、(2)価格の粘着性。モデルは、社会計画者の問題として解くことはできない。
- ▶ このため、金融政策が経済厚生を向上させる可能性がある。

## 独占的競争

- ▶ もしも、すべての企業が同じ製品を製造していたら、需要曲線は水平になる。
- ▶ 結果として、限界費用プライシングとなる。



- ▶ それぞれの企業が少しずつ違うものを販売していると、需要曲線は右下がりになる。
- ▶ 結果として、利潤を最大化するように、最適価格が設定される。
  - ▶ 完全競争では、利潤を最大化するように、生産要素を選択。



- ▶ 消費者は、効用:

$$\log(C_t) - \frac{\chi}{2} h_t^2,$$

を予算制約:

$$A_t + P_t C_t = i_{t-1} A_{t-1} + W_t h_t + \Pi_t,$$

の下で最大化する。

- ▶ 一階の必要条件として、以下が得られる。

$$\frac{1}{C_t} = \beta i_t \frac{P_t}{P_{t+1}} \frac{1}{C_{t+1}}, \quad (7)$$

$$\chi h_t = \frac{1}{C_t} \frac{W_t}{P_t}. \quad (8)$$

- ▶ 独占的競争下にある企業  $i$  は、利潤:

$$\Pi_t(j) = P_t(i) Y_t(i) - W_t h_t(i) - \frac{\phi}{2} \left[ \frac{P_t(i)}{P_{t-1}(i)} - 1 \right]^2 P_t C_t$$

または

$$P_t(i) Y_t(i) - \frac{W_t}{Z_t} Y_t(i) - \frac{\phi}{2} \left[ \frac{P_t(i)}{P_{t-1}(i)} - 1 \right]^2 P_t C_t,$$

— - ここでは、以下の生産関数を代入

$$Y_t(i) = Z_t h_t(i), \quad (9)$$

を、右下がりの需要曲線:

$$Y_t(i) = \left[ \frac{P_t(i)}{P_t} \right]^{-\theta} Y_t$$

- ▶ 企業は価格を変更する際に、調整コストを支払う必要があり、これが価格の粘着性を生み出す。

- ▶ 結果として、企業  $i$  は以下の将来利潤の割引現在価値を最大化するように価格を選択する。

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t}{C_{t+1}} \left\{ \begin{array}{l} P_t(i) \left[ \frac{P_t(i)}{P_t} \right]^{-\theta} \frac{Y_t}{P_t} \\ - \frac{W_t}{Z_t} \left[ \frac{P_t(i)}{P_t} \right]^{-\theta} \frac{Y_t}{P_t} \\ - \frac{\phi}{2} \left[ \frac{P_t(i)}{P_{t-1}(i)} - 1 \right]^2 C_t \end{array} \right\},$$

ここで、企業は家計に保有されているので、将来利潤は、家計の限界代替率（確率割引因子、pricing kernel）で割り引かれる。



- ▶ 一階の必要条件として、以下が導出できる。

$$\begin{aligned}
 & (1 - \theta) P_t(i)^{-\theta} \left[ \frac{1}{P_t} \right]^{-\theta} + \theta \frac{W_t}{P_t Z_t} \left[ \frac{P_t(i)}{P_t} \right]^{-\theta-1} \\
 & - \phi \left[ \frac{P_t(i)}{P_{t-1}(i)} - 1 \right] \frac{1}{P_{t-1}(i)} \\
 & + \beta \phi \left[ \frac{P_{t+1}(i)}{P_t(i)} - 1 \right] \frac{P_t P_{t+1}(i)}{P_t^2(i)} \\
 & = 0.
 \end{aligned}$$

- ▶ 簡便化のため、全ての企業が同じように異なるという対象均衡、すなわち、 $P_t = P_t(i)$  を考えると、以下の価格に関する最適条件（レベルで表現したニュー・ケインジアン・フィリップス曲線）が導出できる。

$$\begin{aligned} (1 - \theta) + \theta \frac{W_t}{P_t Z_t} - \phi (\pi_t - 1) \pi_t & \quad (10) \\ + \beta \phi (\pi_{t+1} - 1) \pi_{t+1} \\ = 0. \end{aligned}$$

ここで

$$\pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1.$$

- ▶ 中央銀行は、テイラー・ルールのような政策ルールに従って名目金利を決定する。

$$i_t = \frac{1}{\beta} \pi_t^\alpha \exp(u_t), \quad (11)$$

もしくは

$$i_t = \frac{1}{\beta} + \alpha (\pi_t - 1) + u_t.$$

- ▶ 金融市場の清算条件は

$$A_t = 0.$$

- ▶ 財市場の清算条件は

$$Y_t = C_t + \frac{\phi}{2} (\pi_t - 1)^2 C_t. \quad (12)$$

- ▶ すると、6つの変数 ( $C_t$ ,  $w_t = \frac{W_t}{P_t}$ ,  $i_t$ ,  $\pi_t$ ,  $h_t$ ,  $Y_t$ ) に、6つの式 (すなわち、(7)-(12)式) よりなるニュー・ケインジアン・モデルを導出できる。:

$$\frac{1}{C_t} = \beta \frac{i_t}{\pi_{t+1} C_{t+1}},$$

$$\chi h_t = \frac{1}{C_t} w_t,$$

$$Y_t = Z_t h_t,$$

$$\begin{aligned} & (1 - \theta) + \theta \frac{w_t}{Z_t} - \phi (\pi_t - 1) \pi_t \\ & + \beta \phi (\pi_{t+1} - 1) \pi_{t+1} \\ = & 0. \end{aligned}$$

$$i_t = \frac{1}{\beta} + \alpha (\pi_t - 1) + u_t,$$

$$Y_t = C_t + \frac{\phi}{2} (\pi_t - 1)^2 C_t.$$

## 対数線形近似

- ▶ ここで、モデルの直観をわかりやすくするために、対数線形近似

$$\log(X_t) \approx \log(X) + \frac{X_t - X}{X},$$

or

$$\log(X_t) - \log(X) \equiv \hat{x}_t = \frac{X_t - X}{X} = \frac{dX_t}{X}.$$

を用いて、モデルを書き換えると、

$$-\hat{c}_t = \hat{i}_t - \hat{\pi}_{t+1} - \hat{c}_{t+1},$$

$$\hat{h}_t = -\hat{c}_t + \hat{w}_t,$$

$$\hat{y}_t = \hat{z}_t + \hat{h}_t,$$

$$\theta w \hat{w}_t - \theta w \hat{z}_t - \phi \hat{\pi}_t + \beta \phi \hat{\pi}_{t+1} = 0.$$

$$\hat{i}_t = \alpha \hat{\pi}_t + \hat{u}_t,$$

$$\hat{y}_t = \hat{c}_t.$$

# 定常状態

- ▶ 技術の定常状態のレベルを  $Z = 1$  とした定常状態は

$$h = \sqrt{\frac{\theta - 1}{\chi\theta}},$$

$$Y = \sqrt{\frac{\theta - 1}{\chi\theta}},$$

$$C = \sqrt{\frac{\theta - 1}{\chi\theta}},$$

$$w = \frac{\theta - 1}{\theta},$$

$$i = \frac{1 - \beta}{\beta},$$

$$\pi = 0.$$

## ニュー・ケインジアン・モデル

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

- ▶ 代入により、変数を減らすことによって、以下の3つの式より構成されるニュー・ケインジアン・モデルが導出される。

- ▶ 動学IS曲線:

$$\hat{y}_t = -(\hat{i}_t - \hat{\pi}_{t+1}) + \hat{y}_{t+1}.$$

- ▶ ニュー・ケインジアン・フィリップス曲線:

$$\hat{\pi}_t = \beta \hat{\pi}_{t+1} + \frac{2(\theta - 1)}{\phi} (\hat{y}_t - \hat{z}_t).$$

- ▶ 金融政策ルール (テイラールール):

$$\hat{i}_t = \alpha \hat{\pi}_t + \hat{u}_t.$$

# メカニズム

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

- ▶ インフレ率が上昇すると、中央銀行は名目金利を引き上げる。
- ▶ これは、生産水準を低下させ、限界費用も下落する。
- ▶ 結果として、インフレ率も低下する。



# 最適政策

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

- ▶ 上記のようなモデルを全体とした場合、どのような政策が採用されるべきか？
- ▶ 政策は、家計の効用を、競争均衡での均衡条件を制約として最大化されるべき。
- ▶ こうした政策は、Ramsey (EJ1927) に因んで、ラムゼー政策と呼ばれる。

# 資源配分の歪み

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

- ▶ 歪みが存在しないのであれば、政策は必要ない。
- ▶ RBCモデルでは、技術ショックに応じて、経済は効率的に反応して変動しているにすぎないため、何らかの政策が採用される必要はない。
- ▶ 前述のとおり、ニュー・ケインジアン・モデルでは、2つの歪みが存在するため、政策が経済厚生を引き上げる可能性。
  - ▶ 独占的競争(過少生産)
  - ▶ 価格の粘着性(マークアップ変動に伴う非効率的な変動)

## 最適金融政策

- ▶ 初期値を所与として、経済厚生：

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[ \log(C_t) - \frac{\chi}{2} h_t^2 \right],$$

を、金融再作ルールを除いた均衡条件：

$$\frac{1}{C_t} = \beta \frac{i_t}{\pi_{t+1}} \frac{1}{C_{t+1}},$$

$$\chi h_t = \frac{1}{C_t} w_t,$$

$$Y_t = Z_t h_t,$$

$$0 = (1 - \theta) + \theta \frac{w_t}{Z_t} - \phi (\pi_t - 1) \pi_t \\ + \beta \phi (\pi_{t+1} - 1) \pi_{t+1},$$

$$Y_t = C_t + \frac{\phi}{2} (\pi_t - 1)^2 C_t,$$

を制約に最大化することで、最適政策（の下での経済の動き）を求めることができる。

# Lagrangian

- ▶ 上記の問題は、以下を最大化する問題として表現される。

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \begin{array}{l} \log(C_t) - \frac{\chi}{2} h_t^2 \\ -\lambda_{1,t} \left[ \frac{1}{C_t} - \beta \frac{i_t}{\pi_{t+1}} \frac{1}{C_{t+1}} \right] \\ -\lambda_{2,t} \left[ \chi h_t - \frac{1}{C_t} w_t \right] \\ -\lambda_{3,t} [Y_t - Z_t h_t] \\ -\lambda_{4,t} \left[ (1 - \theta) + \theta \frac{w_t}{Z_t} - \phi (\pi_t - 1) \pi_t \right. \\ \quad \left. + \beta \phi (\pi_{t+1} - 1) \pi_{t+1} \right] \\ -\lambda_{5,t} \left[ Y_t - C_t - \frac{\phi}{2} (\pi_t - 1)^2 C_t \right] \end{array} \right\}$$

- ▶ この問題の必要条件が最適金融政策ルールとなる。
- ▶ Dynareでは、この最適政策も、均衡条件を入力するだけで求めることができる。
- ▶ インフレ率をいつもゼロ（インフレ目標がゼロ）にすることが最適となり、インフレ目標の理論的基盤が得られる。

# 標準 DSGE モデル

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

- ▶ 中央銀行や国際機関では、Christiano, Eichenbaum and Evans (JPE2005) に倣い、上記のようなシンプルなニュー・ケインジアン・モデルに、賃金の粘着性、価格と賃金のインデクセーション（価格を変えられなくても過去のインフレ率にインデックス）、投資変動にかかる調整コスト、消費の慣習効果、を加えるなどして、データ説明力を高めたモデルを、Smets and Wouters (JEEA2003、AER2007) に倣い、ベイズ最尤法推定して構造パラメーターをショックを推定したものを、中心的なモデルとして用いている。

# 本スライドの構成

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

1. Why DSGE?
2. 景気循環の特徴
3. モデルの導出、解法、推定
4. ニュー・ケインジアン・モデル
5. 今後の課題

# DSGEモデル批判

イントロダクション

Why DSGE?

景気循環の特徴

モデルの導出、解法、推定

ニュー・ケインジアン・モデル

今後の課題

- ▶ 特に、金融危機移行、DSGEモデルへの批判は強い。
- ▶ 既存の主流DSGEモデルへの批判は大いに理解できるが、DSGE、すなわち、動学確率一般均衡というフレームワークで分析することは引き続き重要。
- ▶ DSGEモデルは、SNA体系をベースに構築されている。すなわち、資源制約には全く問題がない。問題があるとすれば、それは、SNA体系を所与とした合理的選択のための様々な仮定。例えば、
  - ▶ 効用関数や生産関数
  - ▶ 組み込まれていないメカニズム
  - ▶ 完全情報
  - ▶ 合理的期待形成
  - ▶ 線形近似
  - ▶ 経済主体の異質性
  - ▶ 善意の政策機関

## 最近の進展と課題（私見）

- ▶ 金融危機後は、金融仲介メカニズムが、変動の源泉になったり、変動を大きなものとするようなモデルが多く作られている。
  - ▶ しかし、バブルのようなものが内生的に発生し、内生的に崩壊するようなメカニズムは作り切れていない。
  - ▶ また、景気循環に対応した政策が、長期的な金融危機を引き起こす確率を高めるといった外部性を考えたモデルもない。すなわち、マクロ・プルーデンス政策的に正当化できるモデルはない。
- ▶ 合理的期待を緩め、過去のデータから推定して期待を形成するようなラーニング、情報収集にコストがかかるため完全情報とは異なる行動が描かれる Rational Inattention、といった考えをベースにした、モデルも構築されつつある。
  - ▶ どのようなラーニングがルーカス批判をクリアできるのか？
  - ▶ Rational Inattention では、市場価格がどのように決まるかが課題。



- ▶ Decision Theoryの成果を用いて、新たな効用関数も用いられるようになっている。
  - ▶ どのような効用関数、生産関数、マッチング関数、調整コスト関数が妥当なのか？
- ▶ 名目金利のゼロ制約下での経済を表現するために、非線形モデルの解法や推定方法も様々な方法が提示されつつある。
  - ▶ 長期にわたるゼロ制約を表現することはできていない。
- ▶ 消費者の異質性を考慮し、所得分配といった問題を取り扱うモデルも多くなりつつある。
  - ▶ 現状では、approximate aggregationが成立することが多く、基本的にマクロ変数だけで、マクロ変数の動学は記述できる、という考え方が主流となっている。
- ▶ 政策当局者のインセンティブを考慮し、そのインセンティブに依存するような政策決定を考える政治経済学的なモデルもある。
  - ▶ 頑健な結果を得ることができるか？