# 新SNAにおける四半期分割についての一考察

昭和52年3月1日

経済企画庁経済研究所
国民所得部国民経済計算調査室

1　新SNAにおけるコモディティ・フロー法（以下コモ法と呼ぶ）による推計結果を支出接近法（以下人的方法と呼ぶ）等により推計された四半期データを用いて四半期分割する方法について考える。ここでは，チャウとリンにより提案されている。最良線型不偏分割法について考察する。この論文
（Gregory C. Chow and An-loh Lin, "Best Linear Unbiased Interpolation, Distribution, and Extrapolation of Time Series by Related Series" Review of Economics and Statistics, Nov. 1971）は「年次データから四半期分列を誘導する方法」（国民所得部，51年1月）に翻訳されている。チャウの方法は四半期の月次分割ないし補外について考えられている。

2　まず，次のように記号を定義する。

$$y = \left.\begin{bmatrix} y^{I}_{1} \\ y^{II}_{1} \\ y^{III}_{1} \\ y^{IV}_{1} \\ \vdots \\ y^{I}_{n} \\ y^{II}_{n} \\ y^{III}_{n} \\ y^{IV}_{n} \end{bmatrix}\right\} 4n\text{コ} \qquad X = \underbrace{\left.\begin{bmatrix} 1 & X^{I}_{12} & \cdots & X^{I}_{1p} \\ 1 & X^{II}_{12} & \cdots & X^{II}_{1p} \\ 1 & X^{III}_{12} & \cdots & X^{III}_{1p} \\ 1 & X^{IV}_{12} & & X^{IV}_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X^{I}_{12} & & X^{I}_{1p} \\ 1 & X^{II}_{12} & & X^{II}_{1p} \\ 1 & X^{III}_{12} & & X^{III}_{1p} \\ 1 & X^{IV}_{12} & & X^{IV}_{1p} \end{bmatrix}\right\} 4n\text{コ}}_{p\text{コ}}$$

$$u = \left.\begin{bmatrix} u^{I}_{1} \\ u^{II}_{1} \\ u^{III}_{1} \\ u^{IV}_{1} \\ \vdots \\ u^{I}_{n} \\ u^{II}_{n} \\ u^{III}_{n} \\ u^{IV}_{n} \end{bmatrix}\right\} 4n \qquad y_{*} = \left.\begin{bmatrix} y_{*1} \\ y_{*2} \\ \vdots \\ y_{*n} \end{bmatrix}\right\} n \qquad X_{*} = \left.\begin{bmatrix} 1 & X^{*}_{12} & \cdots & X^{*}_{1p} \\ 1 & X^{*}_{22} & \cdots & X^{*}_{2p} \\ \vdots & & & \\ 1 & X^{*}_{n2} & \cdots & X^{*}_{np} \end{bmatrix}\right\} n$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} \qquad C_p = \underbrace{\left.\begin{bmatrix} 1111, & 0000, & \cdots, & 0000 \\ 0000, & 1111, & \cdots & 0000 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0000, & 0000, & \cdots & 1111 \end{bmatrix}\right\} n}_{4n}$$

$y_*$ はコモ法から推計された n年分の時系列、$X_*$ は人的方法等により推計された n年分の p変数の時系



列である。われわれの場合 $p=2$, ないし3, すなわち関連する1ないし2系列の四半期パターンで分割すると考えてよいであろう。たとえば、コモ法による消費を人的方法による消費のパターンのみで分割すること、あるいは耐久消費財を人的推計及び出荷指数で分割することである。

$y$は、求めるべき $y_*$ の四半期分割であり、$X$ はすでに推計されている $X_*$ の四半期別数値の時系列である。$X$の第1列は、定数項を表わす。$u$は、次に示すように、方程式の撹乱項、$\beta$ は求めるべき係数ベクトル、$C_p$ は、四半期を年に転換する転換行列である。

3 以上のようなデータを基にして、コモ結果を四半期分割する問題は、次のように表わされる。

$$y = X\beta + u \qquad (1)$$

これは、人的結果$X$から、コモ結果の四半期を求める式である。この(1)式では、係数$\beta$と撹乱項$u$が未知である。この$\beta$と$u$をすでに推計されている年データからどのように推計するかが問題となる。

4 年データと四半期との関係を示す。転換行列を用いて、

$$
\begin{aligned}
y_* &= C_D y \\
&= C_D (X\beta + u) \\
&= C_D X\beta + C_D u \\
&= X_*\beta + u_* \qquad (2)
\end{aligned}
$$

という結果が得られる。

5　ここで，確率変数である攪乱項 $u$ に関しては，次のように仮定する

平均値はゼロである

$$\mathcal{E}(u) = 0 \qquad (3)$$

分散共分散行列は $V$ である

$$\mathcal{E}(uu') = V \qquad (4)$$

この $u$ の分布から $u_*$ の平均値および分散共分散行列は，

$$\mathcal{E}(u_*) = \mathcal{E}(C_D u) = C_D \mathcal{E}(u) = 0 \qquad (5)$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(u_* u_*') &= \mathcal{E}(C_D u u' C_D') \\
&= C_D \mathcal{E}(uu') C_D' \\
&= C_D V C_D' \qquad (6)
\end{aligned}
$$

となる。



6　最良線型不偏推定量は　その定義から次のように表わされる。

$y$ の推定量を $\hat{y}$ で表わせば，$\hat{y}$ は $y_*$ の線型関数として表わされることから

$$
\begin{aligned}
\hat{y} &= A y_* \\
&= A(X_*\beta + u_*) \qquad (7)
\end{aligned}
$$

となる。

次に不偏推定量でなければならないから，$\hat{y}$ 平均値は $y$ の平均値に等しくなくてはならない。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(\hat{y}) - \mathcal{E}(y) &= \mathcal{E}(\hat{y} - y) \\
&= \mathcal{E}\{A(X_*\beta + u_*) - (X\beta + u)\} \\
&= (AX_* - X)\beta + \mathcal{E}(Au_* - u)
\end{aligned}
$$

((3)と(5)より)

$$
\begin{aligned}
&= (AX_* - X)\beta \\
&= 0 \qquad (8)
\end{aligned}
$$

この (7)，(8) 式から

$$AX_* - X = 0 \qquad (9)$$

$$\hat{y} - y = Au_* - u \qquad (10)$$

が得られる。

最後に最良であるためには、$\hat{y}$ の分散が最小でなければならない。すなわち、$\hat{y}-y$ の分散共分散行列（$Cov(\hat{y}-y)$）の対角要素（分散）の和（これが $Cov(\hat{y}-y)$ の trace と呼ばれる）が最小でなければならない。$Cov(\hat{y}-y)$ とその trace は、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
Cov(\hat{y}-y) &= \mathcal{E}(Au_*-u)(Au_*-u)' \\
&= \mathcal{E}(Au_* u_*' A' - Au_* u' - u u_*' A' + u u') \\
&= A\mathcal{E}(u_* u_*')A' - A\mathcal{E}(u_* u') - \mathcal{E}(u u_*')A' + \mathcal{E}(u u') \\
&= AV_{**}A' - AV_{*\oplus} - V_{\oplus *}A' + V \qquad (11)
\end{aligned}
$$

ここで、$V_{**} = \mathcal{E}(u_* u_*')$, $V_{*\oplus} = \mathcal{E}(u_* u')$

$V_{\oplus *} = \mathcal{E}(u u_*')$ とする。

$$
\begin{aligned}
&tr(Cov(\hat{y}-y)) \\
&\quad = tr(AV_{**}A' - AV_{*\oplus} - V_{\oplus *}A' + V) \qquad (12)
\end{aligned}
$$

7. 以上3つの性質を満足するようなAを求めればよい。それは、次のように表わされる。

(9)式を制約条件として、(12)式を最小にするようなAを求めることになる。これは、ラグランジュ係数行列Mを用いて定式化すれば



$$
\begin{aligned}
L = {}& \tfrac{1}{2} tr[AV_{**}A' - AV_{*\oplus} - V_{\oplus *}A' + V] \\
& - tr[M'(AX_* - X)] \qquad (13)
\end{aligned}
$$

をAに関して微分し、それをゼロとしAを求めることになる。

$$
\begin{aligned}
\partial L/\partial A = {}& \tfrac{1}{2}\{\partial tr(AV_{**}A')/\partial A - \partial tr(AV_{*\oplus})/\partial A \\
& - \partial tr(V_{\oplus *}A')/\partial A + \partial tr V/\partial A\} - \\
& \partial tr[M'AX_*]/\partial A + \partial tr(M'X)/\partial A \\
= {}& \tfrac{1}{2}\{2AV'_{**} - V'_{*\oplus} - V_{\oplus *}\} - MX'_* \\
& (V_{**}' = V_{**},\ V'_{*\oplus} = V_{\oplus *} \text{ より}) \\
= {}& AV_{**} - V_{\oplus *} - MX'_* \\
= {}& 0 \qquad (14)
\end{aligned}
$$

これより、

$$AV_{**} - V_{\oplus *} = MX'_* \qquad (15)$$

を得る。

8. (15)式から、Aは、

$$A = MX'_* V_{**}^{-1} + V_{\oplus *} V_{**}^{-1} \qquad (16)$$

となる。これを(9)式に代入すると、

$$MX'_* V_{**}^{-1} X_* + V_{\oplus *} V_{**}^{-1} X_* - X = 0 \qquad (17)$$

となり、これより、Mは、。

$$M = (X - V_{\oplus *} V_{**}^{-1} X_*)(X'_* V_{**}^{-1} X_*)^{-1}$$

$$= X(X'_* V_{**}^{-1} X_*)^{-1} - V_{\oplus *} V_{**}^{-1} X_* (X'_* V_{**}^{-1} X_*)^{-1} \quad (18)$$

として求められる。これを，(16)式に代入することにより

Aは次のようになる。

$$A = \{X(X'_* V_{**}^{-1} X_*)^{-1} - V_{\oplus *} V_{**}^{-1} X_* (X'_* V_{**}^{-1} X_*)^{-1}\}$$

$$(X'_* V_{**}^{-1}) + V_{\oplus *} V_{**}^{-1}$$

$$= X(X'_* V_{**}^{-1} X_*)^{-1} X'_* V_{**}^{-1} + V_{\oplus *} V_{**}^{-1}$$

$$- V_{\oplus *} V_{**}^{-1} X_* (X'_* V_{**}^{-1} X_*)^{-1} X'_* V_{**}^{-1}$$

$$= X(X'_* V_{**}^{-1} X_*)^{-1} X'_* V_{**}^{-1}$$

$$+ V_{\oplus *} V_{**}^{-1} [I - X_* (X'_* V_{**}^{-1} X_*)^{-1} X'_* V_{**}^{-1}] \quad (19)$$

9. (19)式と(7)式から，$y$の推定量$\hat{y}$は，

$$\hat{y} = X(X'_* V_{**}^{-1} X_*)^{-1} X'_* V_{**}^{-1} y_*$$

$$+ V_{\oplus *} V_{**}^{-1} [I - X_* (X'_* V_{**}^{-1} X_*)^{-1} X'_* V_{**}^{-1}] y_* \quad (20)$$

となる。

一方，(2)の $y_*$ と $X_*$ は年データであり推計されているから，これより，(2)式の一般化最小2乗法により

$\beta$を推定すると，

$$\hat{\beta} = (X'_* V_{**}^{-1} X_*)^{-1} X'_* V_{**}^{-1} y_* \quad (21)$$



$$\hat{u}_* = y_* - X_* \{(X'_* V_{**}^{-1} X_*)^{-1} X'_* V_{**}^{-1} y_*\}$$

$$= \{I - X_* (X'_* V_{**}^{-1} X_*)^{-1} X'_* V_{**}^{-1}\} y_* \quad (22)$$

となる。

これらから，

$$\hat{y} = X\hat{\beta} + V_{\oplus *} V_{**}^{-1} \hat{u}_* \quad (23)$$

となり，$\hat{y}$が得られる。

10. (23)式の第2項は，(1)式の$u$の各要素($u_j$)を(2)式の$u_*$の一次式と考えたときの係数を(2)式より推定した$\hat{u}_*$に乗じたことを意味している。すなわち

$$u_j = \alpha_1 u_{*1} + \alpha_2 u_{*2} + \cdots + \alpha_n u_{*n} + u_j$$

$$= \alpha' u_* + u_j \quad (24)$$

で最小2乗法により$\alpha'$を推定すれば，

$$\alpha' = \varepsilon(u_j u_*)\, \varepsilon(u_* u'_*)^{-1}$$

$$= (V_{\oplus *} \text{ の } j \text{ 行})\, V_{**}^{-1}$$

となる。

この第2項は，$V_{\oplus *}$ 及び $V_{**}^{-1}$ が未知であるため推計できない。そこで，$u$の分散共分散に関して何らかの仮定を用いなければならない。

11 (ケース1) $u$の分散共分散行列 $V$ に関して，自

己相関はなく、分散が一定と仮定する。

$$V = \sigma^2 I_{4n} \tag{25}$$

このときには

$$\begin{aligned} V_{**} &= C_D \sigma^2 I_{4n} C_D' \\ &= \sigma^2 C_D C_D' \\ &= 4\sigma^2 I_n \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} V_{\oplus *} &= \mathcal{E}(u u_*') \\ &= \mathcal{E}(u u' C_D) \\ &= V C_D' \\ &= \sigma^2 C_D' \end{aligned} \tag{27}$$

となる。これより、(23) 式は、

$$\begin{aligned} \hat{y} &= X\hat{\beta} + \sigma^2 C_D' (4\sigma^2 I_n)^{-1} \hat{u}_* \\ &= X\hat{\beta} + \frac{1}{4} C_D' \hat{u}_* \end{aligned} \tag{28}$$

となる。この第2項は、年データにより推計した残差の1/4づつを各四半期に加えることを意味する。

（ケース2） $u$ = 自己相関があると仮定される場合。

$$u_j = \alpha u_{j-1} + \varepsilon_j \tag{29}$$



ただし、$\mathcal{E}(\varepsilon_j) = 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\varepsilon_j \varepsilon_{j'}) &= \sigma^2 \quad \text{if } j = j' \\ &= 0 \quad \text{if } j \neq j' \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned} V &= \mathcal{E}(u u') \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \cdots & \alpha^{4n-1} \\ \alpha & 1 & \alpha & \cdots & \alpha^{4n-2} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 & \cdots & \alpha^{4n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^{4n-1} & \alpha^{4n-2} & \alpha^{4n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2} \\ &= B \cdot \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2} \end{aligned} \tag{30}$$

となる。

これにより、

$$\begin{aligned} V_{\oplus *} &= V C_D' \\ &= \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2} \cdot B C_D' \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} V_{**} &= C_D V C_D' \\ &= \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2} C_D B C_D' \end{aligned}$$

となるから、(23) 式は、

$$\hat{y} = X\hat{\beta} + \left(\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2} BC'_D\right)\left(\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2} C_D B C'_D\right)^{-1}\hat{u}_*$$

$$= X\hat{\beta} + BC'_D\,(C_D B C'_D)^{-1}\hat{u}_* \qquad (33)$$

と表わされる。したがって，自己相関係数αが求められればよい。

12. 実際にデータからαを直接に推計するのは困難である。われわれができうるのは，年データで推計した(22)式から，自己相関係数を推計することである。$\hat{u}_*$の自己相関係数ρは，

$$\rho = \frac{V_{**}\text{の}(1,2)\text{要素}}{V_{**}\text{の}(1,1)\text{要素}} \qquad (34)$$

となる。これより

$$\rho = \frac{\alpha(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)^2}{2\alpha^3+4\alpha^2+6\alpha+4}$$

$$= \frac{\alpha+2\alpha^2+3\alpha^3+4\alpha^4+3\alpha^5+2\alpha^6+\alpha^7}{2\alpha^3+4\alpha^2+6\alpha+4} \qquad (35)$$

となる。したがって，$\hat{\rho}$が推計されたとき，(35)式からαを推計すればよいことになる。

13 以上考察したことから，われわれの場合には，次のような手続きをとるのが適当と考えられる。

（ステップ1） コモ結果と人的推計結果とから(2)式



で（ケース1）の仮定に基づいて，通常の最小2乗法により係数βと残差を推定する。

（ステップ2） 残差項に自己相関がないと判断される場合には，(28)式に基づいて四半期分割を行う。

すなわち，人的推計結果に，推定した係数βを乗じ，その後で各年の残差を4等分しそれを加える。

（ステップ3） 自己相関があると認められるときは，上述（ケース2）の手順に従い推定する。

14. 当面，われわれの接近方法としては，これまで用いられてきた通常の四半期分割方法と，上述の（ステップ2），すなわち，自己相関なしと仮定した方法とを行い両者を比較するのがよいのではないかと思われる。なお，「年次データから四半期系列を誘導する方法」に紹介されているリスマン・サンデーの方法とギンズバーグの方法も研究官室でプログラムが開発されているのでこれらについても試みてみるのもよいと思われる。

チャウ・リンの方法は，データが追加されるとき，

過去に溯って四半期が修正されることになることに若干の問題がある。しかし、この点は、チャウのextrapolationの方法を用いるなどして修正は可能であろう。