

### 3. 感度分析

第 2.2～2.6 節で、欠測を含むデータの統計的処理方法として、単一代入法、キャリブレーション推定法、IPW 法、多重代入法、及び尤度法を説明した。これらの手法の適性を決める諸条件のうち最も重要なものは、欠測データメカニズムである。MAR の条件下では、適切な補助変数の利用によって欠測バイアスが緩和される。単一代入法、キャリブレーション推定法、IPW 法、及び多重代入法は、MAR の下で、補助変数の利用により欠測バイアスを緩和する手法である。他方、MNAR の条件下では、補助変数の利用だけでなく、欠測データメカニズムのモデル化によって欠測バイアスの緩和を図る。欠測データメカニズムを明示的に(選択モデル)、あるいは非明示的に(パターン混合モデル)モデル化し、モデルから導かれる観測データ尤度により最尤推定を行う方法が、不完全データ分析手法としての尤度法である。

第 1.3 節で述べたとおり、手法ごとの適性を決める条件である欠測データメカニズムは、分析者が手にしている不完全データからは検証不可能である。換言すれば、手法ごとの推定結果から導かれる結論は、検証不可能な前提に基づいている。そこで、検証不可能な前提条件を変化させたときに、推定結果がどのように変化するかを確認する作業が必要になる。この作業は、「感度分析」と呼ばれる。感度分析によって、前提条件を常識的な範囲で変化させても推定結果に大きな変化が生じなければ、頑健な結論を導くことができる。あるいは逆に、推定結果に大きな変化をもたらさないような前提条件の領域を特定することで、導かれる結論の頑健性の程度を知ることができる。

感度分析は明確に定義される概念ではない(※たとえば、季節調整法「X-12-ARIMA」の事後診断における安定性分析も、時系列末端で中心化移動平均を算出するために必要な時系列値を欠測値とみなせば、広義の感度分析と考えることができる)が、典型的な感度分析では、MAR を特殊形として含む MNAR モデルに基づいて、MAR 及び MNAR のそれぞれを前提条件とした推定結果を比較する。選択モデルによる感度分析の具体例を次に示す。

#### 例 1. 選択モデルによる感度分析の例

調査項目として、来期に景気はよくなると思うかを、「はい」か「いいえ」で回答してもらった調査を、1 千人の調査客体から成る同じ標本で2時点にわたって実施する。調査客体  $i$  の第1時点における回答  $Y_{1i}$  及び第2時点における回答  $Y_{2i}$  は2値変数で、「はい」の場合は値1、「いいえ」の場合は値0をとる。単純化のため、第1時点はすべての調査客体が回答し、第2時点では脱落が生じ一部の調査客体が無回答であるとする。観測指標は、2値変数  $R_i$  によって定義される。第2時点の回答が得られていれば観測指標の値は1 ( $R_i = 1$ ) であり、第2時点の回答が得られていなければ観測指標の値は0

( $R_i = 0$ )である。調査の結果、表3-1に示した通りの不完全データが得られたとする。

表3-1 不完全データ

|      |     | 2時点とも回答 ( $R = 1$ ) |     | 脱落 ( $R = 0$ ) | 計    |
|------|-----|---------------------|-----|----------------|------|
|      |     | 第2時点                |     |                |      |
|      |     | はい                  | いいえ |                |      |
| 第1時点 | はい  | 50                  | 150 | 350            | 550  |
|      | いいえ | 200                 | 200 | 50             | 450  |
| 計    |     | 250                 | 350 | 400            | 1000 |

この標本調査の目的は、来期景気見通しをよしとする経済主体の割合を推定することである。第1時点は欠測が生じていないから、標本設計が正しい限り、来期景気見通しをよしとする経済主体の割合を偏りなく推定できる。第2時点は欠測が生じているため、推定に欠測バイアスが伴う可能性がある。ここでは、第2時点における来期景気見通しをよしとする経済主体の割合を、選択モデルを用いて推定する。

選択モデルの選択方程式を、次式の通りロジットモデルで定式化する。

$$\ln \frac{P(R = 1|Y_1, Y_2)}{1 - P(R = 1|Y_1, Y_2)} = \varphi_0 + \varphi_1 Y_1 + \varphi_2 Y_2$$

対数尤度は次式の通りである。

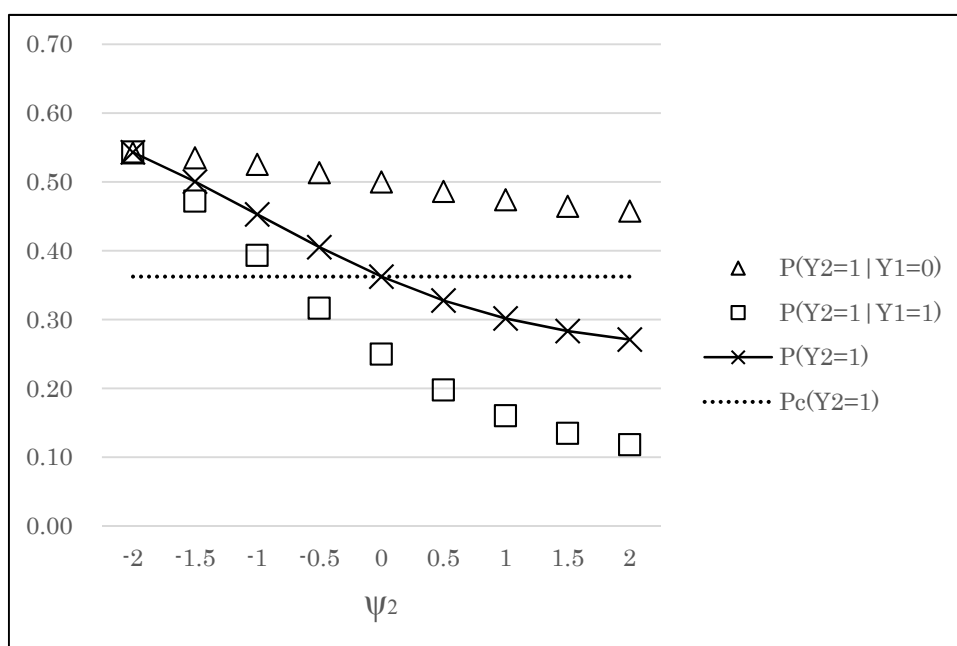
$$\ln L = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{(y_1, y_2)} n_{y_1 y_2} \left( \ln \pi_{y_1 y_2} + \ln \frac{\exp(\varphi_0 + \varphi_1 y_1 + \varphi_2 y_2)}{1 + \exp(\varphi_0 + \varphi_1 y_1 + \varphi_2 y_2)} \right) \\ + \sum_{y_1} m_{y_1+} \ln \left( \sum_{y_2} \pi_{y_1 y_2} \frac{1}{1 + \exp(\varphi_0 + \varphi_1 y_1 + \varphi_2 y_2)} \right) \end{array} \right\}$$

ただし、 $n_{y_1 y_2}$ は( $Y_{1i} = y_1, Y_{2i} = y_2$ )となる調査客体の数、 $m_{y_1+}$ は( $Y_{1i} = y_1, Y_{2i} = NA.$ )となる調査客体の数である。このモデルでは、パラメータ $\varphi_2$ の値が0であれば欠測データメカニズムはMARとなり、0でなければMNARとなる。従って、欠測データメカニズムがMARとMNARのいずれであるかという検証不可能な条件に、推定結果がどのように依存しているかを確認するためには、パラメータ $\varphi_2$ の値を0近傍で変化させ、それぞれの値に対する推定結果を比較すればよい。

図3-2は、パラメータ $\varphi_2$ の値を0近傍で変化させ、それぞれの値に対する推定結果を示したものである。パラメータ $\varphi_2$ の値を-2から2までの範囲で変化させている。これはオッズ比で倍率0.14~7.4の範囲に相当する。第2時点において来期の景気見通しをよしとする経済主体の割合 $P(Y_2 = 1)$ を実線で連結された記号×で表す。また、推定目標である第2時点の来期景気見通しをよしとする経済主体の割合について

て、母集団特性値の完全ケース分析による推定値（図の凡例では系列 $P_C$ ）を点線で示す。パラメータ $\varphi_2$ の値が0である場合の推定値は、完全ケース分析の結果と一致する。欠測データメカニズムを無視した場合、第2時点の来期景気見通しをよとする経済主体の割合の推定値は、中央の破線が示す値 0.36 である。この値が、欠測データメカニズムの条件を変えたときにどれほど変わり得るかを、感度分析によって確認できる。

図3-2 2時点にわたる2値変数に関する感度分析



パラメータ $\varphi_2$ の値を-2 から 2 まで変化させたときに、第2時点において来期の景気見通しをよとする経済主体の割合 $P(Y_2 = 1)$ は、0.54から0.27までの範囲を動き、頑健な結論は得られない。パラメータ $\varphi_2$ の値が小さいと、第2時点に来期の景気見通しをよとする人ほど脱落しやすいというモデルになるので、脱落した 400 人のなかで第2時点の来期景気見通しをよとする人の割合が大きく予測される。逆に、パラメータ $\varphi_2$ の値が大きいと、第2時点に来期の景気見通しをよとしない人ほど脱落しやすいというモデルになるので、脱落した 400 人のなかで第2時点の来期景気見通しをよとする人の割合が小さく予測される。このため、第2時点において来期の景気見通しをよとする経済主体の割合は、パラメータ $\varphi_2$ の値に対して右下がりの曲線を描く。

第2時点において来期の景気見通しをよとする経済主体の割合 $P(Y_2 = 1)$ は、第1時点において来期の景気見通しをよとしない経済主体のうち、第2時点の来期景気見通しをよとする経済主体の割合 $P(Y_2 = 1|Y_1 = 0)$ と、第1時点において来期の景気見通しをよとした経済主体のうち、第2時点の来期景気見通しもよとする経済

主体の割合 $P(Y_2 = 1|Y_1 = 1)$ との加重平均である。図3-2では、第1時点において来期の景気見通しをよくないとした経済主体のうち、第2時点の来期景気見通しをよとする経済主体の割合 $P(Y_2 = 1|Y_1 = 0)$ を記号△、第1時点において来期の景気見通しをよとした経済主体のうち、第2時点の来期景気見通しもよとする経済主体の割合 $P(Y_2 = 1|Y_1 = 1)$ を記号□で、それぞれ表す。分析の結果によると、パラメータ $\phi_2$ の値を-2 から 2 まで変化させたときに、第1時点において来期の景気見通しをよくないとした経済主体のうち、第2時点の来期景気見通しをよとする経済主体の割合 $P(Y_2 = 1|Y_1 = 0)$ は、0.54 から 0.46 までの範囲を動き、比較的頑健である。他方、第1時点において来期の景気見通しをよとした経済主体のうち、第2時点の来期景気見通しもよとする経済主体の割合 $P(Y_2 = 1|Y_1 = 1)$ は、0.54 から 0.12 までの範囲を動き、頑健ではない。これは、第1時点において来期の景気見通しをよくないとした経済主体 450 人のうち、脱落した者は 50 人であるのに対して、第1時点において来期の景気見通しをよとした経済主体 550 人のうち脱落した者は 350 人にものぼり、両者の部分標本で欠測率が大きく異なることによる。当然ながら、欠測率が低いほど、感度分析の結果は頑健となる。

第2時点の来期景気見通しをよとする人の割合は、欠測データメカニズムを無視した推定の結果によると 0.36 であるが、MNAR の可能性を考慮すると値が大きく変わる。通常の統計調査では 0.36 という推定値しか公表されないが、実はこの推定結果は欠測データメカニズムに関する仮定に強く依存していることが、感度分析から明らかとなる。

## 例 2. パターン混合モデルによる感度分析の例

興味の対象となる変数を調査客体の身長 $H$ 及び体重 $W$ とする。身長にも体重にも欠測が生じ得るとする(項目単位の欠測)。身長の観測指標 $R_H$ と体重の観測指標 $R_W$ の値を与件としたときの身長と体重の条件付同時分布を特定化することで、パターン混合モデルが得られる。ここでは、欠測パターンごとの身長と体重の同時分布として正規分布を仮定する。

$$\begin{pmatrix} H \\ W \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} R_H = r_H \\ R_W = r_W \end{pmatrix} \sim N \left( \begin{pmatrix} \mu_H(r_H, r_W) \\ \mu_W(r_H, r_W) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_H^2(r_H, r_W) & \sigma_{HW}(r_H, r_W) \\ \sigma_{HW}(r_H, r_W) & \sigma_W^2(r_H, r_W) \end{pmatrix} \right)$$

このパターン混合モデルでは、未知のパラメータの数は  $5 \times 4 = 20$  である(欠測パターンごとの平均値ベクトル及び分散共分散行列の要素数=5、欠測パターン数=4)。しかし、識別可能なパラメータの数は  $5 + 2 + 2 + 0 = 9$  である(身長と体重の両方が観測される第1欠測パターンでは5つのパラメータ  $(\mu_{H(1,1)}, \mu_{W(1,1)}, \sigma_{H(1,1)}^2, \sigma_{W(1,1)}^2, \sigma_{HW(1,1)})$ 、身長のみが観測される第2欠測パターンでは2つのパラメータ  $(\mu_{H(1,0)}, \sigma_{H(1,0)}^2)$ 、体重のみが観測される第3欠測パターンでは2つのパラメータ  $(\mu_{W(0,1)},$

$\sigma_{W(0,1)}^2$ )が識別され、身長と体重の両方が観測されない欠測パターンでは識別されるパラメータはない)。

パターン混合モデルでは、過小識別への対処として、モデルに制約を課す。たとえば、分散共分散行列は欠測パターンによらず同一であるという制約により、パラメータの数は 20 から 11 に減る。これら 11 のうち識別可能なパラメータの数は 7 である。分散共分散が欠測パターンごとに同一であるとする制約は、強い条件ではあるものの、欠測データメカニズムが MNAR であることを妨げるものではない。さらに、平均値パラメータに関して制約条件  $\pi_{H(0,0)} = \pi_{H(0,1)}$  及び  $\pi_{W(0,0)} = \pi_{W(1,0)}$  を課す。これは、先の分散共分散同一制約とともに、4つある欠測パターンを実質的に身長と体重のそれぞれについて2つずつの欠測パターンに縮約する役割を果たす。この制約を追加することで、未知のパラメータの数は 9 となる。これら 9 のうち識別可能なものは 7 である。パターン混合モデルでは、識別のための制約条件を適当に組み替えて、制約条件の組合せごとに推定結果を比較することで、感度分析が行われる。

### 例 3. 欠測率の仮説検定に対する感度分析

第 1 節に示した母集団平均の推定における欠測バイアスの例にもとづいて、パターン混合モデルによる感度分析のごく簡単な例を示す。母集団の中で、調査対象に選ばれた場合には必ず回答する者と必ず回答しない者があらかじめ決まっているとする(これを「無回答に対する決定論的な見方 (deterministic view of nonresponse)」という)。これらの集合を、それぞれ回答者母集団、無回答者母集団と呼ぶことにする。回答者母集団の母集団全体に占める割合を  $\pi_R$  とし、無回答者母集団の母集団全体に占める割合を  $\pi_N$  とする。定義上  $\pi_R + \pi_N = 1$  である。興味の対象となる変数の母集団平均を  $\mu$  とし、回答者母集団の平均を  $\mu_R$  とし、無回答者母集団の平均を  $\mu_N$  とする。定義から、 $\mu = \pi_R \mu_R + \pi_N \mu_N = (1 - \pi_N) \mu_R + \pi_N \mu_N$  である。ここで、統計調査実施主体の分析者が、楽観的に MCAR を仮定して完全ケース分析により母集団平均  $\mu$  に関する次式の仮説検定を行うとする。

$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu \neq \mu_0 \end{cases} \quad (2-6-1)$$

完全ケース分析の標本平均  $\hat{\mu}_{Incomp}$  については  $E(\hat{\mu}_{Incomp}) = \mu_R$  であるから、分析者の意図する仮説検定(2-6-1)に反して、実際は次式の仮説検定における帰無仮説モデルに直面していることになる。

$$\begin{cases} H'_0: & \mu_R = \mu_0 \\ H'_1: & \mu_R \neq \mu_0 \end{cases} \quad (2-6-2)$$

ここで、分析者の意図する仮説検定(2-6-2)を同値変形して次式を得る。

$$\begin{cases} H_0: \mu_R = \frac{\mu_0 - \pi_N \mu_N}{1 - \pi_N} \\ H_1: \mu_R \neq \frac{\mu_0 - \pi_N \mu_N}{1 - \pi_N} \end{cases}$$

(2-6-3)

分析者は、実際には $H_0'$ モデルに基づいているのに、帰無仮説 $H_0$ を検定しているつもりになっている。このときに、帰無仮説 $H_0$ を本当は棄却すべきでないのに、分析者が棄却と判断する確率 $\beta$ 、及び帰無仮説 $H_0$ を本当は棄却すべきなのに、分析者が棄却せずと判断する確率 $\gamma$ を示したのが図3-3である(※ $\beta$ 及び $\gamma$ は、それぞれ「第1種の過誤の確率」及び「第2種の過誤の確率」のように聞こえるがそうではない点に注意せよ。)

図3-3 検定の欠測率に対する感度分析

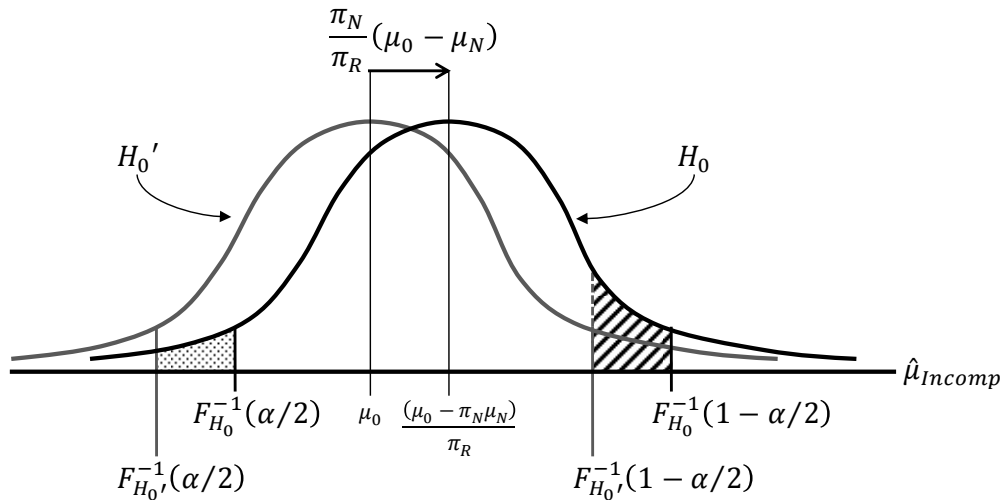


図3-3に示す通り、意図した帰無仮説 $H_0$ の下で標本平均 $\hat{\mu}_{Incomp}$ の従う分布(図の確率密度関数曲線 $H_0$ )は、意図されない帰無仮説 $H_0'$ の下で標本平均 $\hat{\mu}_{Incomp}$ の従う分布(図の確率密度関数曲線 $H_0'$ )を横軸方向に $\pi_N(\mu_0 - \mu_N)/(1 - \pi_N)$ だけ平行移動したものに等しい。帰無仮説 $H_0$ 及び $H_0'$ の下での標本平均 $\hat{\mu}_{Incomp}$ の分布関数を、それぞれ $F_{H_0}$ 及び $F_{H_0'}$ と表す。仮説検定の有意水準を $\alpha$ としたとき、推定値 $\hat{\mu}_{Incomp}$ の値が2つの点 $F_{H_0}^{-1}(1 - \alpha/2)$ と $F_{H_0}^{-1}(\alpha/2)$ に挟まれた区間に生じた場合、分析者は帰無仮説 $H_0$ を棄却すべきでないのに棄却と判断する(ただし $F_{H_0}^{-1}$ 及び $F_{H_0'}^{-1}$ は、それぞれ順に確率分布関数 $F_{H_0}$ 及び $F_{H_0'}$ の逆関数である)。したがって、図3-3の右方に斜線で示した領域の面積が、棄却すべきでないのに棄却と判断する確率 $\beta$ に等しい。同様に、推定値 $\hat{\mu}_{Incomp}$ の値が2つの点 $F_{H_0}^{-1}(\alpha/2)$ と $F_{H_0}^{-1}(1 - \alpha/2)$ に挟まれた区間に生じた場合、

分析者は帰無仮説 $H_0$ を棄却すべきであるのに棄却せずと判断する。したがって、図3-3の左方に点描で示した領域の面積が、棄却すべきなのに棄却せずと判断する確率 $\gamma$ に等しい。 $\beta$ と $\gamma$ は次式で与えられる。

$$\beta = 1 - \frac{\alpha}{2} - F_{H_0} \left( F_{H_0}^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right) = 1 - \frac{\alpha}{2} - F_{H_0} \left( F^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \mid \mu_0 \right) \mid \frac{\mu_0 - \pi_n \mu_n}{1 - \pi_n} \right) \quad (2-6-4)$$

$$\gamma = \frac{\alpha}{2} - F_{H_0} \left( F_{H_0}^{-1} \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right) = \frac{\alpha}{2} - F_{H_0} \left( F^{-1} \left( \frac{\alpha}{2} \mid \mu_0 \right) \mid \frac{\mu_0 - \pi_n \mu_n}{1 - \pi_n} \right) \quad (2-6-5)$$

分布関数 $F$ を正規分布、検定の有意水準 $\alpha$ を10%とした場合の感度分析の結果を、図3-4に示す。一般性を失わずに、 $\mu_0 = 0$ としている。図3-4のグラフは、パラメータ $\mu_n$ の値を $\sigma, 2\sigma, \dots, 5\sigma$ の範囲で動かしたときの、欠測率の関数としての $\beta$ 値及び $\gamma$ 値をパラメータ $\mu_n$ の値ごとに示している。

興味の対象となる変数が、先験的に正規性を有することが分かっており、また、回答群と無回答群で平均の差が常識的に、たとえば2標準偏差以上異なることは考えにくい場合に、不完全データで有意水準10%の平均値の検定を行うことを考える。この場合、図3-4によると、欠測率が4%以下であれば、棄却すべきでないのに棄却と判断する確率 $\beta$ は1%以下に抑えられ、また、欠測率が5%以下であれば、棄却すべきなのに棄却せずと判断する確率 $\gamma$ は1%以下に抑えられることが分かる。

図3-4 検定の欠測率に対する感度分析

